Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean $u(x)$, $v(x)$ funciones derivables, teniendo en cuenta que la derivada del producto es:

$$\left(u(x)\,v(x)\right)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

integrando queda:

$\int (u(x)\,v(x))'\,dx = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx$, es decir,

$u(x)\,v(x) = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx$

Despejando el último sumando se obtiene: $\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$

Teniendo en cuenta que $du = u'(x)\,dx$ y $dv = v'(x)\,dx$, en la práctica la fórmula de integración por partes se escribe: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$

La expresión de integración por partes permite escribir una integral en función de otra, y será útil si ésta última es más sencilla que la inicial. Algunas veces es necesario emplear el método varias veces o bien combinarlo con otros métodos.

Ejemplo 9:

a) $\int (2x+1)e^x dx$

Para resolver la integral, se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$\int (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x - 2e^x + C$

b) $\int (x^2-5)\cos x\,dx$

Se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = x^2-5 \\ dv = \cos x\,dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = 2x dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$\int (x^2-5)\cos x\,dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x - \int 2x\operatorname{sen} x\,dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx$

Para resolver la integral $\int x\operatorname{sen} x\,dx$, se aplica de nuevo el método de integración por partes:

$\begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Por tanto, $\int x\operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

Sustituyendo en la integral inicial se obtiene: $\int (x^2-5)\cos x\,dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$

c) $\int x^3 \ln x\,dx$

Para resolver la integral, se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3\,dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Observación:

En general, las integrales del tipo $\int P_n(x)e^{ax}\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{sen} ax\,dx$, $\int P_n(x)\cos ax\,dx$ siendo $P_n(x)$ un polinomio de grado n, se resuelven utilizando el método de integración por partes tomando

$u = P_n(x)$. Sin embargo, en las integrales del tipo $\int P_n(x) \ln x \, dx$, se toma $u = \ln x$