INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Dada la integral $\int f(x)\,dx$, si consideramos x como una función de otra variable, $x = g(t)$, entonces $dx = g'(t)\ dt$, y sustituyendo en la integral inicial se obtiene $\int f(g(t))\ g'(t)\ dt$.

En el caso de que esta segunda integral sea más sencilla que la primera, se resuelve en la variable t y posteriormente se deshace el cambio de variable sustituyendo t en función de x.

En resumen, para realizar un cambio de variable en una integral se realizan los siguientes pasos:

1.- Se elige el cambio de variable que se quiere realizar indicando la expresión que relaciona la variable x inicial con la nueva variable t.

2.- Se calcula dx en función de la variable t y dt.

3.- Se sustituye en la integral la variable x y dx por las expresiones en la variable t y dt. La nueva integral obtenida solamente debe depender de t.

4.- Se resuelve esta integral, obteniendo la solución en la variable t.

5.- Se deshace el cambio de variable, dando el resultado en la variable inicial x.

Ejemplo 7:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx$, esta integral no es inmediata ya que no se ajusta a ningún caso de la tabla. Para resolverla se hace el cambio de variable $\sqrt{x-2} = t$, elevando al cuadrado queda $x - 2 = t^2$ y despejando x, $x = t^2 + 2$

Diferenciando la igualdad anterior se obtiene $dx = 2t\ dt$.

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2}}2t\,dt = 2\int \frac{t^2+2}{t}t\,dt = 2\int (t^2+2)dt = 2\int t^2 dt + 4\int dt = 2\frac{t^3}{3} + 4t + C$$

Deshaciendo el cambio resulta $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + 4\sqrt{x-2} + C$

b) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$, para resolver esta integral se hace el cambio de variable $e^x = t$

Diferenciando la igualdad anterior queda $e^x\,dx = dt$, es decir, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = \int \frac{t^2}{(t+1)}\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t+1}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \int dt - \int \frac{1}{t+1}dt = t - \ln(t+1) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = e^x - \ln(e^x+1) + C$

Observación: Las integrales inmediatas generalizadas (segunda columna) también se pueden calcular mediante cambio de variable.

Ejemplo 8:

a) $\int (1-2x)^3\,dx$, esta integral es inmediata como se ha comprobado en el ejemplo 6, pero también se puede resolver realizando el cambio de variable $\begin{cases} t = 1-2x \\ dt = -2dx \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int (1-2x)^3\,dx = \int t^3\frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2}\int t^3 dt = -\frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + C = -\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C$$

b) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x - 1}}$, esta integral es inmediata y se puede resolver aplicando la tabla, ya que es fácil obtener en el numerador la derivada del radicando.

También se puede resolver mediante el cambio de variable $\begin{cases} t = 3\operatorname{sen} x - 1 \\ dt = 3\cos x\, dx \quad \Rightarrow \quad \cos x\, dx = \dfrac{dt}{3} \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{3sen\, x - 1}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-1/3}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3sen\, x - 1)^2} + C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Se denomina **función racional** a cualquier función de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad \text{siendo } a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

En este apartado únicamente consideraremos funciones racionales en las que las raíces de $Q(x)$ sean reales.

Algunas funciones racionales se integran de forma inmediata; entre otras las **fracciones simples** de la forma $\dfrac{A}{(ax + b)^n}$ con $n \in \mathbb{R}$

Ejemplo 10:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-5} = \ln(x-5) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^4} = \int (x+1)^{-4}\, dx = \frac{(x+1)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3(x+1)^3} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x-2}dx = \ln(x^2 - 5x - 2) + C$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x+1} = \int \frac{1}{4}\frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\ln(4x+1) + C$

e) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(3x+1)^2} = 7\int \frac{3}{3}(3x+1)^{-2}\, dx = \frac{7}{3}\int (3x+1)^{-2}\, 3\,dx = \frac{7}{3}\frac{(3x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{7}{3(x+1)} + C$

Si la integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ no es inmediata, se procede de la siguiente forma:

Caso I: Si $grado\, P(x) \geq grado\ Q(x)$ se realiza la división de los polinomios

Sea $C(x)$ el cociente de la división y $R(x)$ el resto, se cumple que: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ con $grado\, R(x) < grado\ Q(x)$

Por tanto, $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$

La integral $\int C(x)\, dx$ es inmediata y la integral $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ en caso de que no sea inmediata, se puede resolver como se indica en el caso II.

Ejemplo 11:

a) $\int \frac{x+1}{x-1}dx$, como el grado del polinomio del numerador no es menor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{l|l} x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x+1} & 1 \\ / \quad 2 & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Integrando se obtiene $\int \frac{x+1}{x-1}dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x-1}dx = x + 2\ln(x-1) + C$

b) $\int \frac{x^2+1}{x-2}dx$, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + \quad 1 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+2x} & x+2 \\ / \quad 2x+1 & \\ \quad \underline{-2x+4} & \\ \qquad 5 & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{x^2+1}{x-2} = x + 2 + \frac{5}{x-2}$

Integrando se obtiene $\int \frac{x^2+1}{x-2}\,dx = \int\left(x+2+\frac{5}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 5\ln(x-2) + C$

Caso II: Si $grado\,P(x) < grado\ Q(x)$ se factoriza $Q(x)$ (Ver Unidad didáctica 2) para descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simples de la siguiente forma:

- Por cada raíz real simple a, se considera una fracción del tipo $\frac{A}{x-a}$ donde A es una constante real a determinar.
- Por cada raíz real múltiple a de multiplicidad r, se cosideran las r fracciones siguientes $\frac{A_1}{x-a}$, $\frac{A_2}{(x-a)^2}$ ..., $\frac{A_r}{(x-a)^r}$ donde A_1, A_2,..., A_r son constantes reales a determinar.

Para determinar las constantes anteriores, se iguala el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a la suma de las fracciones simples consideradas. Una vez determinadas, la resolución de la integral $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se reduce al cálculo de las integrales de las fracciones simples, aplicando la propiedad de linealidad.

Ejemplo 12:

a) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$, como el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, en este caso no hay que realizar la división. Se calculan las raíces del denominador para factorizarlo:

$$x^2-5x+6=0\ , \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}\ \text{, por tanto, } \ x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

Se descompone $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ como suma de fracciones simples $\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

Para determinar las constantes A y B, al ser iguales los denominadores se igualan los numeradores:

$$x+1 = A(x-3) + B(x-2)$$

y en esta igualdad se dan dos valores a la variable x (preferentemente los valores de las raíces de $Q(x)$ por simplicidad en los cálculos): $\begin{cases} x=2 \quad \Rightarrow \quad 3=-A \Rightarrow \quad A=-3 \\ x=3 \quad \Rightarrow \quad 4=B \end{cases}$

Por tanto, la integral inicial queda: $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{-3}{x-2}dx + \int \frac{4}{x-3}dx = -3\ln(x-2) + 4\ln(x-3) + C$

b) $\int \frac{x}{x^2-2x+1} = \int \frac{x}{(x-1)^2}dx$

Se descompone el cociente de polinomios como suma de fracciones simples teniendo en cuenta que 1 es raíz doble del polinomio del denominador:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \Rightarrow x = A(x-1)+B \;;\; \begin{cases} x=1 \Rightarrow 1 = B \\ x = 0 \Rightarrow 0 = -A + B \Rightarrow A = B = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int \frac{x}{x^2-2x+1} = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \ln(x-1) + \int (x-1)^{-2}dx = \ln(x-1) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C$$

c) $\int \frac{2}{x^3+4x^2}dx$, factorizando el polinomio del denominador queda $x^3 + 4x^2 = x^2(x+4)$

Teniendo en cuenta que x=0 es una raíz doble y x=-4 es simple, la descomposición en fracciones simples de $\frac{2}{x^3+4x^2}$ es

$$\frac{2}{x^3+4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4} = \frac{Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2}{x^2(x+4)} \Rightarrow 2 = Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2$$

Dando 3 valores a la variable x obtenemos un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las constantes a determinar:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 2 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{2} \\ x = -4 \Rightarrow 2 = C(-4)^2 \Rightarrow C = \frac{1}{8} \\ x = -1 \Rightarrow 2 = -3A + 3B + C \Rightarrow 3A = 3B + C - 2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - 2 = \frac{-3}{8} \Rightarrow A = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int \frac{2}{x^3+4x^2}dx = \frac{-1}{8}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{B}{x^2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+4}dx = -\frac{1}{8}\ln x + \frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{8}\ln(x+4) + C = \frac{1}{8}\ln x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8}\ln(x+4) + C$$

d) $\int \frac{dx}{5x^2-11x-12}$

Se calculan las raíces del denominador para factorizarlo:

$$5x^2 - 11x - 12 = 0 \,, \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{121+240}}{10} = \frac{11 \pm 19}{10} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{4}{5} \end{cases} \text{, por tanto, } 5x^2 - 11x - 12 = 5(x-3)\left(x + \frac{4}{5}\right) = (x-3)(5x+4)$$

Se descompone $\frac{1}{5x^2-11x-12}$ como suma de fracciones simples $\frac{1}{5x^2-11x-12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{5x+4} = \frac{A(5x+4)+B(x-3)}{(x-3)(5x+4)}$

Para determinar las constantes A y B, al ser iguales los denominadores se igualan los numeradores:

$$1 = A(5x+4) + B(x-3)$$

Dando dos valores a la variable x: $\begin{cases} x = 3 \Rightarrow 1 = 19A \Rightarrow A = \frac{1}{19} \\ x = -\frac{4}{5} \Rightarrow 1 = -\frac{19}{5}B \Rightarrow B = \frac{-5}{19} \end{cases}$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int \frac{dx}{5x^2-11x-12} = \int \frac{dx}{(x-3)(5x+4)} = \int \frac{1}{19}\frac{dx}{x-3} + \int \left(-\frac{5}{19}\right)\frac{dx}{5x+4} = \frac{1}{19}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{19}\int \frac{5\,dx}{5x+4} = \frac{1}{19}\ln(x-3) - \frac{1}{19}\ln(5x+4) + C$$

Observación: En este ejercicio se ha considerado la descomposición en fracciones simples $\frac{1}{5x^2-11x-12}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{5x+4}$ en lugar de $\frac{1}{5x^2-11x-12}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+\frac{4}{5}}$ para que sea más sencillo el cálculo de las constantes.