*Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal*

**6.** Utilizando el cambio de variable indicado, transformar las siguientes integrales en integrales racionales y resolverlas:

**a)** $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$ con $e^x = t$ **b)** $\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}dx$ con $\sqrt{x} = t$ **c)** $\int \frac{1}{5^x-1}dx$ con $5^x = t$

**Solución**

**a)** Diferenciando en la igualdad $e^x = t$ queda $e^x dx = dt$ .

Sustituyendo el cambio en la integral inicial se obtiene la siguiente integral racional en la variable $t$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

Al ser $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$ , la descomposición en fracciones simples a considerar es:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1 = A(t-1) + B(t+1)$

Para obtener los valores de $A$ y $B$ se dan dos valores a $t$: $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2} \\ t = -1 \Rightarrow 1 = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Por tanto, $\frac{1}{t^2-1} = \frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \int \left(\frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}\right)dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt = -\frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(t-1) + C =$$
$$= \ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C$

**b)** Elevando al cuadrado en la igualdad $\sqrt{x} = t$ queda $x = t^2$ y diferenciando se obtiene $dx = 2t\,dt$ .

Sustituyendo en la integral inicial queda:

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t-1}{1+t}2t\,dt = 2\int \frac{t^2-t}{1+t}dt$$

La integral $\int \frac{t^2-t}{1+t}$ es una integral racional en la que el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, por lo que se debe efectuar la división polinómica:

$$\begin{array}{rl|l} t^2 - t & & 1+t \\ \hline -t^2 - t & & t-2 \\ / \;\; -2t & & \\ 2t + 2 & & \\ \hline / \;\;\; 2 & & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{t^2-t}{1+t} = t - 2 + \frac{2}{1+t}$

Así, $\int \frac{t^2 - t}{1+t}\,dt = \int \left( t - 2 + \frac{2}{1+t} \right) dt = \int (t-2)\,dt + \int \frac{2}{1+t}\,dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln(1+t) + C$

Deshaciendo el cambio de variable resulta:

$$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{1 + \sqrt{x}}\,dx = 2\left( \frac{x}{2} - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C \right) = x - 4\sqrt{x} + 4\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

**c)** Diferenciando en la igualdad $5^x = t$ queda $5^x \ln 5\, dx = dt$, de donde, $dx = \frac{dt}{5^x \ln 5} = \frac{dt}{t \ln 5}$.

Sustituyendo en la integral inicial se obtiene:

$$\int \frac{1}{5^x - 1}\,dx = \int \frac{1}{t-1} \frac{dt}{t \ln 5} = \frac{1}{\ln 5} \int \frac{1}{t(t-1)}\,dt$$

$\int \frac{1}{t(t-1)}\,dt$ es una integral racional que se resuelve considerando la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + Bt}{t(t-1)}$$

Al ser iguales los denominadores, se igualan los numeradores: $1 = A(t-1) + Bt$

Se obtienen los valores de $A$ y $B$ dando dos valores a $t$: $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow 1 = B \Rightarrow B = 1 \\ t = 0 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1 \end{cases}$

Por tanto, $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \int \left( \frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{1}{t-1}\,dt = -\ln t + \ln(t-1) + C = \ln \frac{t-1}{t} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta:

$$\int \frac{1}{5^x - 1}\,dx = \frac{1}{\ln 5} \ln \frac{5^x - 1}{5^x} + C$$