Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES REALES

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Dada una función real $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ se dice que $f(x)$ es:

- **Creciente** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que se cumple $\begin{cases} f(x) \le f(x_o) & si \quad x < x_o \\ f(x_o) \le f(x) & si \quad x_o < x \end{cases}$
- **Estrictamente creciente** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que se verifica $\begin{cases} f(x) < f(x_o) & si \ x < x_o \\ f(x_o) < f(x) & si \ x_o < x \end{cases}$
- **Decreciente** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que se cumple $\begin{cases} f(x) \ge f(x_o) & si \ x < x_o \\ f(x_o) \ge f(x) & si \ x_o < x \end{cases}$
- **Estrictamente decreciente** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que se verifica $\begin{cases} f(x) > f(x_o) & si \ x < x_o \\ f(x_o) > f(x) & si \ x_o < x \end{cases}$

A continuación se van a dar condiciones suficientes para caracterizar estos conceptos para funciones derivables en x_o.

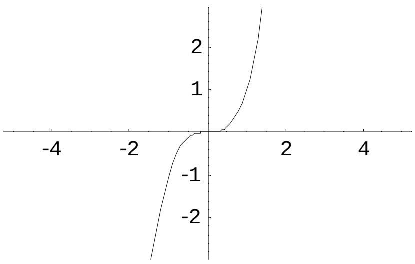
Proposición

Dada $f(x)$ una función derivable en x_o se cumple:

a) Si $f'(x_o) > 0$ entonces *f* es estrictamente creciente en x_o.

b) Si $f'(x_o) < 0$ entonces *f* es estrictamente decreciente en x_o.

Notar que los recíprocos de estas afirmaciones no son ciertos, por ejemplo, $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en x_o = 0 (ver figura) y sin embargo, $f'(0)$ no es positiva ya que $f'(0) = 0$.



Ejemplo 1: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en su dominio de definición:

a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$

Esta función es derivable en su dominio, $D = (-\infty, +\infty)$, por ser un polinomio y su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6$.

En este caso, para estudiar el signo de $f'(x)$ se factoriza el polinomio obteniéndose:

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x+1)(x-1)$

El signo de esta expresión depende del signo de (x + 1) y del signo de (x − 1) que cambian en los puntos x = -1 y x = 1 respectivamente, como se observa en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
x + 1	-	+	+
x - 1	-	-	+
$f'(x) = 6x^2 - 6$	+	-	+

Al ser $f'(x) > 0$ en (-∞, -1) y en (1, +∞), se deduce que f es estrictamente creciente en dichos intervalos y al ser $f'(x) < 0$ en (-1, 1), la función f es estrictamente decreciente en este intervalo.

b) $f(x) = (\ln x)^2$

Esta función es derivable en su dominio D = (0, +∞) y su derivada es $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

Para determinar el signo de $f'(x)$ se analiza el signo del numerador y del denominador:

- El signo del numerador puede cambiar en los puntos que lo anulan: $2\ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

  Así, $2\ln x < 0$ en (0, 1) y $2\ln x > 0$ en (1, +∞).

- El signo del denominador es siempre positivo en los puntos del dominio.

Se divide el dominio en los intervalos determinados por x = 1 y se estudia el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos, obteniéndose:

- En (0, 1), $f'(x)$ < 0, luego f es estrictamente decreciente.
- En (1, +∞), $f'(x)$ > 0, luego f es estrictamente creciente.

EXTREMOS RELATIVOS

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ se dice que $f(x)$ tiene en x_o:

- Un **máximo relativo**, si existe un entorno de x_o en el que se cumple $f(x) \le f(x_o)$.
- Un **mínimo relativo**, si existe un entorno de x_o en el que se cumple $f(x_o) \le f(x)$.
- Un **extremo relativo**, si f tiene en x_o un máximo o un mínimo relativo.

Si las desigualdades anteriores se verifican de forma estricta para $x \ne x_o$, se dice que el máximo o mínimo es **estricto**.

Los extremos relativos también se denominan óptimos locales; dando lugar a los términos máximo local y mínimo local.

Condición necesaria de extremo relativo (condición de primer orden)

Si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x_o \in D$ y x_o es un extremo relativo de f, entonces $f'(x_o) = 0$.

Esta condición es necesaria pero no es suficiente; por ejemplo, $f(x) = x^3$ tiene como derivada $f'(x) = 2x^2$ que se anula en x = 0 y sin embargo, es estrictamente creciente en x = 0 por lo que no tiene extremo en dicho punto.

Se dice que x_o **es un punto crítico** de f si $f'(x_o)$ = 0 o no existe $f'(x_o)$.

Los extremos relativos de *f* son puntos críticos, pero no todo punto crítico es extremo relativo. Nótese que los puntos candidatos a ser extremos relativos están entre aquellos que verifican la condición necesaria anterior y aquellos donde la función derivada no existe.

Condición suficiente de extremo relativo (condición de segundo orden)

Si *f* es una función con derivada segunda continua en x_o y $f'(x_o) = 0$, se verifica:

a) $f''(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tiene en x_o un mínimo relativo estricto.

b) $f''(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tiene en x_o un máximo relativo estricto.

Otra forma de determinar lo que ocurre en un punto crítico x_o en el que *f* es continua, es estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en puntos muy próximos a x_o, situados antes y después de él. Así,

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ estrictamente creciente en puntos } x \text{ próximos a } x_o \text{ con } x < x_o \\ f \text{ estrictamente decreciente en puntos } x \text{ próximos a } x_o \text{ con } x > x_o \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ tiene en } x_o \text{ un} \\ \text{máximo relativo estricto} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ estrictamente decreciente en puntos } x \text{ próximos a } x_o \text{ con } x < x_o \\ f \text{ estrictamente creciente en puntos } x \text{ próximos a } x_o \text{ con } x > x_o \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ tiene en } x_o \text{ un} \\ \text{mínimo relativo estricto} \end{array}$$

Ejemplo 2: Calcular los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

El dominio de definición de esta función es $D = (-\infty, +\infty)$ ya que $1 + x^2 > 0$ para cualquier valor de x.

Para hallar los puntos críticos se calcula $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ que existe siempre y se anula en $x = 0$, luego este es el único punto crítico de *f*. Para determinar si $x = 0$ es extremo relativo o no, se puede proceder de las dos formas siguientes.

- Si se quiere aplicar la condición suficiente se tiene que hallar $f''(x) = \dfrac{2(1 + x^2) - 2x.2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$ y como $f''(0) = 2 > 0$, se deduce que *f* tiene en $x = 0$ es un mínimo relativo estricto.

- Si se quiere estudiar el crecimiento y decrecimiento de *f* en las proximidades de $x = 0$, es necesario estudiar el signo de $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ antes y después del 0 como se indica en la tabla que sigue:

Signo	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$2x$	-	+
$1 + x^2$	+	+
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↓	↑

En $x = 0$ la función cambia de estrictamente decreciente a estrictamente creciente, por lo tanto, *f* tiene un mínimo relativo en dicho punto.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 9 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Al estar definida la función de forma distinta antes y después de $x = 1$, se estudia f en cada uno de los dos intervalos en que se divide el dominio.

- En $(-\infty, 1)$, $f(x) = x^2 - 7x + 9$ y su derivada $f'(x) = 2x - 7$ se anula si $2x - 7 = 0$, es decir en $x = \frac{7}{2}$, valor que no se considera ya que esta fuera del intervalo considerado.
- En $(1, +\infty)$, $f(x) = 3x$ y su derivada $f'(x) = 3$ no se anula nunca.

Por lo tanto, el único candidato a ser extremo relativo es $x = 1$, punto en el que se comprueba fácilmente que es f continua. Para determinar si es extrmo, se estudia el crecimiento y decrecimiento de f en las proximidades de $x = 1$:

- si $x < 1$, $f'(x) = 2x - 7 < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$
- si $x > 1$, $f'(x) = 3 > 0$, entonces f es estrictamente creciente en $(1, +\infty)$

Por tanto, f tiene en $x = 1$ un mínimo relativo estricto.

Generalización de las condiciones suficientes

La condición suficiente de extremo relativo vista anteriormente no da información si $f''(x_o) = 0$. A continuación se enuncia una generalización de esta condición suficiente.

Si $f(x)$ es una función que tiene derivadas continuas hasta orden n en un punto $x_o \in D$ y $f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots = f^{(n-1)}(x_o) = 0, f^{(n)}(x_o) \neq 0$, entonces:

$$n \text{ par y } \begin{cases} f^{(n)}(x_o) > 0 \;\Rightarrow\; \text{f tiene en } x_o \text{ un mínimo relativo estricto} \\ f^{(n)}(x_o) < 0 \;\Rightarrow\; \text{f tiene en } x_o \text{ un máximo relativo estricto} \end{cases}$$

$$n \text{ impar y } \begin{cases} f^{(n)}(x_o) > 0 \;\Rightarrow\; f \text{ es estrictamente creciente en } x_o \\ f^{(n)}(x_o) < 0 \;\Rightarrow\; f \text{ es estrictamente decreciente en } x_o \end{cases}$$

Ejemplo 3: Calcular los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 + 5$

La derivada de la función es $f'(x) = 4x^3$ que se anula en $x = 0$.

La derivada segunda es $f''(x) = 12x^2$ y al sustituir $x = 0$ queda $f''(0) = 0$. Como esta derivada se anula la condición suficiente de extremo no nos da información y hay que aplicar la generalización de esta.

Para ello se halla la derivada tercera, $f'''(x) = 24x$, cuyo valor en $x = 0$ es $f'''(0) = 0$; que de nuevo no nos da información al ser nula. La derivada cuarta es $f^{(4)}(x) = 24$ que es positiva y n un número par, por tanto, f tiene en $x = 0$ un mínimo relativo estricto.

CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ en el que la función es derivable, se dice que $f(x)$ es:

- **Cóncava** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que la gráfica de f no queda por encima de la recta tangente a f en x_o, es decir, si $f(x) \leq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$.

Si para $x \neq x_o$ la desigualdad anterior es estricta se dice que f es **estrictamente cóncava** en x_o.

- **Convexa** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que la gráfica de f no queda por debajo de la recta tangente a f en x_o, es decir, si $f(x) \geq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$.

Si para $x \neq x_o$ la desigualdad anterior es estricta se dice que f es **estrictamente convexa** en x_o.

La función *f* tiene en $x_o \in D$ **un punto de inflexión** si *f* es estrictamente cóncava a la izquierda de x_o y estrictamente convexa a su derecha o viceversa.

Si *f* es derivable en un punto de inflexión x_o, entonces la recta tangente a *f* en dicho punto atraviesa a la gráfica de *f* en $(x_o, f(x_o))$.

A continuación, se enuncian tres resultados que caracterizan la concavidad, convexidad y la existencia de puntos de inflexión para funciones derivables.

Proposición 1 (condiciones suficientes de concavidad y convexidad)

Si *f* es una función con derivada segunda continua en un punto x_o, se verifica :

a) $f''(x_o)>0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente convexa en x_o

b) $f''(x_o)<0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente cóncava en x_o

Proposición 2 (condición necesaria de punto de inflexión)

Si *f* es una función con derivada segunda continua en un punto x_o y *f* tiene en x_o un punto de inflexión, entonces $f''(x_o) = 0$.

Proposición 3 (condición suficiente de punto de inflexión)

Si *f* es una función con derivada tercera continua en un punto x_o y $f''(x_o) = 0$, se verifica:

$$f'''(x_o) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_o \text{ es un punto de inflexión de } f$$

Nota: Entre los candidatos a puntos de inflexión, hay que tener en cuenta no sólo aquellos puntos que anulan $f''(x)$ sino también donde no existe.

Ejemplo 4: Estudiar la concavidad, convexidad y hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(1+x^2)$

Su derivada segunda se ha calculado en el ejemplo 2a) y es $f''(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$.

Para realizar el estudio de su signo se factoriza únicamente el numerador ya que el denominador es siempre positivo quedando $f''(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

El signo de esta expresión depende de los signos de (1 - *x*) y de (1 + *x*) que cambia en los puntos *x* = 1 y *x* = -1 respectivamente, como se observa en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
1 - *x*	+	+	-
1 + *x*	-	+	+
$f''(x)$	-	+	-
f(*x*)	∩	∪	∩

Luego en los intervalos (-∞, -1) y (1, +∞) la función es estrictamente cóncava y en (-1, 1) es estrictamente convexa. Además como $x = 1$ y $x = -1$ son puntos del dominio de *f* en los que cambia la concavidad-convexidad de la función, se tiene que son puntos de inflexión.

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

Calculamos sus derivadas de primer y segundo orden que son $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$ y $f''(x) = \dfrac{-4}{9\sqrt[3]{(2x-1)^5}}$. Como $f''(x) \neq 0$ sólo hay que considerar el punto $x = \dfrac{1}{2}$ del dominio en el que la función no es derivable, y estudiar el signo de $f''(x)$ antes y después de él.

En $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ se cumple que $f''(x) > 0$, luego f es estrictamente convexa y en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ se cumple que $f''(x) < 0$, luego f es estrictamente cóncava. Por lo tanto, $x = \dfrac{1}{2}$ es un punto de inflexión de *f*.

Ejemplo 5: Hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12$

Se calcula la derivada de segundo orden que es $f''(x) = 36x^2 - 60x - 24$ y los puntos donde se anula, obteniéndose

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 36x^2 - 60x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ y } x = -\frac{1}{3}$$

Para comprobar la condición suficiente de punto de inflexión se halla la derivada tercera quedando $f'''(x) = 72x - 60$ cuyo valor en los puntos $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{3}$ es: $f'''(2) = 72.2 - 60 = 84 \neq 0$ y $f'''\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 72\left(-\dfrac{1}{3}\right) - 60 = -84 \neq 0$. Por lo tanto, $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{3}$ son puntos de inflexión de *f*.

Las tres proposiciones anteriores se pueden generalizar en el siguiente resultado:

Si $f(x)$ es una función que tiene derivadas continuas hasta orden *n* en un punto $x_o \in D$ y $f''(x_o) = f'''(x_o) = \ldots = f^{(n-1)}(x_o) = 0, f^{(n)}(x_o) \neq 0$, entonces:

$$\text{Si } n \text{ es par y } \begin{cases} f^{(n)}(x_o) > 0 \;\Rightarrow\; f \text{ es estrictamente convexa en } x_o \\ f^{(n)}(x_o) < 0 \;\Rightarrow\; f \text{ es estrictamente cóncava en } x_o \end{cases}$$

S*i n es impar* $\Rightarrow x_o$ *es un punto de inflexión de f*

Ejemplo 6: Hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = -2x^5 + 7x - 1$

Se calcula la derivada de segundo orden, $f''(x) = -40x^3$ que únicamente se anula en $x = 0$.

Hallando la derivada tercera queda $f'''(x) = -120x^2$ cuyo valor en el punto $x = 0$ es $f'''(0) = 0$. Al ser cero esta derivada se calculan las derivadas siguientes en $x = 0$ hasta encontrar la primera que no se anule, obteniéndose:

$$f^{(4)}(x) = -240x \text{ cuyo valor en } x = 0 \text{ es } f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = -240 \text{ cuyo valor en } x = 0 \text{ es } f^{(5)}(0) = -240 \neq 0$$

Como la primera derivada no nula en $x = 0$ es de orden impar, $n = 5$, se concluye que $x = 0$ es punto de inflexión de *f*.

ASÍNTOTAS Y RAMAS PARABÓLICAS

Estos conceptos surgen al estudiar el comportamiento de la función en el infinito.

Asíntotas

Una recta *r* es **asíntota** de $y = f(x)$ si la gráfica de la función se acerca indefinidamente a alguno de los "extremos" de la recta *r*.

La recta $x = a$ es **asíntota vertical** de $y = f(x)$ si se cumple $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

La recta $y = b$ es **asíntota horizontal** de $y = f(x)$ si se cumple $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

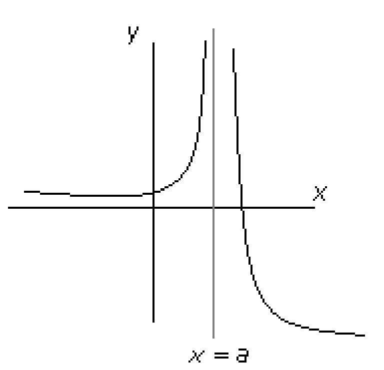
La recta $y = mx + n$ con $m \neq 0$, es **asíntota oblicua** de $y = f(x)$ si se cumple:

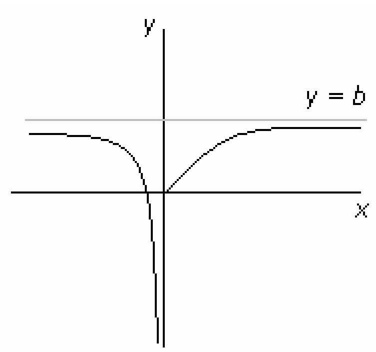
$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (mx+n)\big) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - (mx+n)\big) = 0$$

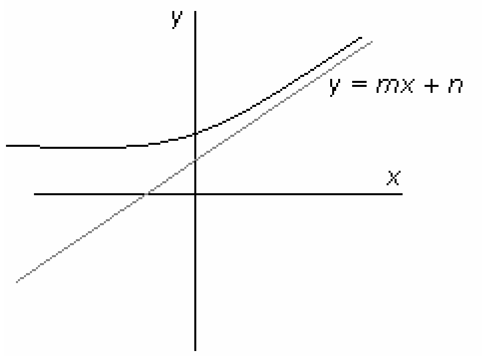
Los valores de m y n se calculan de la forma que sigue:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx \qquad \text{o} \qquad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx$$

Notar que la existencia de asíntota horizontal en una dirección (+∞ o -∞) implica que no puede existir en dicha dirección asíntota oblicua. Ahora bien lo que ocurre en una dirección es independiente de lo que pasa en la otra.







Asíntota vertical　　Asíntota horizontal　　Asíntota oblicua

Ejemplo 7: Calcular las asíntotas, si existen, de la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$

La única recta candidata a ser asíntota vertical es $x = 0$ ya que al anular el denominador puede dar lugar a que el límite de la función sea infinito. Para comprobarlo hallamos los límites laterales de la función,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Luego, $x = 0$ es asíntota vertical de *f* por la derecha y por la izquierda ya que ambos límites dan infinito.

Para determinar si existen asíntotas horizontales hay que hallar los límites siguientes:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} = +\infty$, al no haberse obtenido un número real, no existe asíntota horizontal si $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty$, al no haberse obtenido un número real, no existe asíntota horizontal si $x \to -\infty$

Como en las dos direcciones anteriores no existen asíntotas horizontales, *f* puede tener asíntotas oblicuas. Par determinarlo se calculan los límites siguientes:

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3} = 1 \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + 3x - 1}{x^2} = -3 \end{cases}$$

luego, $y = x - 3$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^3}{x^2} - x = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+3x-1}{x^2} = -3 \end{cases}$$

luego, $y = x - 3$ también es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

Ramas Parabólicas

Una función *f* tiene rama parabólica horizontal, vertical u oblicua si la gráfica de *f* cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, se comporta como si formara parte de una parábola de eje horizontal, vertical u oblicuo respectivamente.

Cada tipo de rama parabólica se caracteriza por:

a) *Rama parabólica de eje horizontal*

- Cuando $x \to +\infty$, si se cumple $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$
- Cuando $x \to -\infty$, si se cumple $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$

b) *Rama parabólica de eje vertical*

- Cuando $x \to +\infty$, si se cumple $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$
- Cuando $x \to -\infty$, si se cumple $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

c) *Rama parabólica de eje oblicuo* $y = mx$

- Cuando $x \to +\infty$, si se cumple:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \neq 0, \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \pm\infty$

- Cuando $x \to -\infty$, si se cumple:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} \neq 0, \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \pm\infty$

Notar que la existencia en una dirección de asíntota horizontal u oblicua cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ impide que haya rama parabólica en esa misma dirección.

Ejemplo 8: Estudiar si la función $f(x) = 3x^2e^{-2x}$ tiene ramas parabólicas.

• En la dirección $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^{2x}} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2e^{2x}} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{4e^{2x}} = \dfrac{6}{+\infty} = 0$, luego $y = 0$ es una asíntota horizontal si $x \to +\infty$, así no hay rama parabólica en esta dirección.

• En la dirección $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2e^{-2x} = (+\infty)e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$, luego no hay asíntota horizontal si $x \to -\infty$ y existe la posibilidad de rama parabólica.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2e^{-2x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^{-2x} = (-\infty)e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$, por lo tanto, tiene una rama parabólica de eje vertical cuando $x \to -\infty$.

ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Dada la función $y = f(x)$, su gráfica es el conjunto de puntos $(x,\ f(x))$ siendo x cualquier punto de su dominio. En la mayoría de los casos es imposible obtener todos estos puntos, por lo que es conveniente realizar un estudio de la función que nos permita obtener su gráfica; para ello seguiremos los siguientes pasos que resumen lo estudiado anteriormente:

1) Determinación del dominio de la función, D.
2) Continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
3) Simetrías:
   - Respecto del eje OY: si $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$.
   - Respecto del origen O: si $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D$.
4) Periodicidad (sólo se comprueba si la función es de tipo trigonométrico)

Las simetrías y la periodicidad de $f(x)$ nos permiten obtener la gráfica de la función estudiándola en un subconjunto del dominio.

5) Puntos de corte con los ejes:
   - Con OX: se resuelve la ecuación $f(x) = 0$ que nos da las abcisas de los puntos buscados.
   - Con OY: si $0 \in D$, el punto de corte es $(0,\ f(0))$.
6) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.
   - $f'(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente creciente en x_o.
   - $f'(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente decreciente en x_o.
   - $f'(x_o) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} f''(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_o \text{ es un mínimo relativo estricto.} \\ f''(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_o \text{ es un máximo relativo estricto.} \\ f''(x_o) = 0, \text{ en este caso no se obtiene información.} \end{cases}$

Observar que los extremos relativos también se pueden determinar analizando los cambios de crecimiento a decrecimiento o viceversa, de la función.

7) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
   - $f''(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ estrictamente convexa en x_o.
   - $f''(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ estrictamente cóncava en x_o.
   - $f''(x_o) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} f'''(x_o) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_o \text{ es un punto de inflexión.} \\ f'''(x_o) = 0, \text{ en este caso no se obtiene información.} \end{cases}$

Observar que los puntos de inflexión también se pueden determinar analizando los cambios de concavidad-convexidad estricta de la función.

8) Asíntotas y ramas parabólicas.

Las asíntotas verticales se estudian en los puntos de discontinuidad de la función y las demás asíntotas y las ramas parabólicas se estudian cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

A veces puede ser interesante hallar los puntos de corte de las asíntotas horizontales y oblicuas con la gráfica de la función.

9) Tabla con algunos valores significativos de x y de $f(x)$.

Ejemplo 8: Estudiar y representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1) $D = \mathbb{R} - \{1\}$

2) $f(x)$ es continua y derivable en D por ser cociente de polinomios con denominador no nulo.

   $f(x)$ es discontinua en $x = 1$, ya que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{0}=+\infty$. Además, no es derivable en este punto por no ser continua.

3) Para estudiar si la gráfica de $f(x)$ es simétrica se halla $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=\dfrac{-x^3}{(x+1)^2}$. Al no coincidir con $f(x)$ ni con $-f(x)$, se concluye que no es simétrica ni respecto del eje OY ni respecto del origen.

4) La periodicidad de la función en este caso no es necesario estudiarla ya que no es trigonométrica.

5) Cortes con los ejes:

   - Con OY, $x=0 \Rightarrow f(0)=0$
   - Con OX, $y=0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x=0$

   Luego el único punto de corte es (0, 0).

6) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

   Se calcula $f'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)^2-x^3 2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3 2}{(x-1)^3}=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$

   En la tabla siguiente se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los puntos x = 0, 1, 3 que son los que anulan al denominador o numerador de $f'(x)$.

Signo	$(-\infty, 0)$	(0, 1)	(1, 3)	$(3, +\infty)$
$x-3$	-	-	-	+
$(x-1)^3$	-	-	+	+
$f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$	+	+	-	+
$f(x)$	↑	↑	↓	↑

   La función es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$, (0, 1) y $(3, +\infty)$ y estrictamente decreciente en (1, 3).

   Así en x = 3 hay un cambio de decrecimiento a crecimiento, luego se alcanza en este punto un mínimo relativo. Para dibujarlo se calcula $f(3)=\dfrac{27}{4}$, por lo tanto, el punto mínimo es $\left(3, \dfrac{27}{4}\right)$.

   Observar que en el punto x = 1 también hay cambio de crecimiento a decrecimiento, sin embargo no es máximo de la función ya que este punto no pertenece al dominio.

7) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

   Derivando $f'(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$ se calcula $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(3x^2-6x)(x-1)-(x^3-3x^2)3}{(x-1)^4}=\frac{6x}{(x-1)^4}$$

   En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos determinados por x = 0 y x = 1:

Signo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	-	+	+
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

La función es estrictamente cóncava en $(-\infty, 0)$ y estrictamente convexa en $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. Como en el punto $x = 0$ cambia la concavidad-convexidad estricta de $f(x)$, se deduce que $(0, 0)$ es un punto de inflexión.

8) Asíntotas.

La única asíntota vertical es $x = 1$ ya que 1 es un punto de discontinuidad, como se ha comprobado en el estudio de la continuidad de la función: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$.

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales pudiendo existir asíntotas oblicuas o ramas parabólicas, que se estudian hallando los siguientes límites:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{(x-1)^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y = x + 2 \\ \text{es asíntota oblicua si } x \to +\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{(x-1)^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y = x + 2 \\ \text{es asíntota oblicua si } x \to -\infty \end{array}$$

No hay ramas parabólicas ya que existen asíntotas oblicuas.

Se pueden calcular los puntos de corte de $f(x)$ y la asíntota $y = x + 2$ resolviendo la ecuación: $x + 2 = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

$$x + 2 = \frac{x^3}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} - (x+2) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Como $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$, el único punto de corte de la gráfica con la asíntota oblícua es $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

9) Por último podemos construir la siguiente tabla de puntos relevantes obtenidos en los apartados anteriores:

x	$f(x)$
0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
3	$\frac{27}{4}$

Teniendo en cuente el estudio realizado, la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ es: