Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Dada la función $y = f(x)$, su gráfica es el conjunto de puntos $(x,\ f(x))$ siendo x cualquier punto de su dominio. En la mayoría de los casos es imposible obtener todos estos puntos, por lo que es conveniente realizar un estudio de la función que nos permita obtener su gráfica; para ello seguiremos los siguientes pasos que resumen lo estudiado anteriormente:

1) Determinación del dominio de la función, D.
2) Continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
3) Simetrías:
   - Respecto del eje OY: si $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$.
   - Respecto del origen O: si $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D$.
4) Periodicidad (sólo se comprueba si la función es de tipo trigonométrico)

Las simetrías y la periodicidad de $f(x)$ nos permiten obtener la gráfica de la función estudiándola en un subconjunto del dominio.

5) Puntos de corte con los ejes:
   - Con OX: se resuelve la ecuación $f(x) = 0$ que nos da las abcisas de los puntos buscados.
   - Con OY: si $0 \in D$, el punto de corte es $(0,\ f(0))$.
6) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.
   - $f'(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente creciente en x_o.
   - $f'(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente decreciente en x_o.
   - $f'(x_o) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} f''(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_o \text{ es un mínimo relativo estricto.} \\ f''(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_o \text{ es un máximo relativo estricto.} \\ f''(x_o) = 0, \text{ en este caso no se obtiene información.} \end{cases}$

Observar que los extremos relativos también se pueden determinar analizando los cambios de crecimiento a decrecimiento o viceversa, de la función.

7) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
   - $f''(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ estrictamente convexa en x_o.
   - $f''(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ estrictamente cóncava en x_o.
   - $f''(x_o) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} f'''(x_o) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_o \text{ es un punto de inflexión.} \\ f'''(x_o) = 0, \text{ en este caso no se obtiene información.} \end{cases}$

Observar que los puntos de inflexión también se pueden determinar analizando los cambios de concavidad-convexidad estricta de la función.

8) Asíntotas y ramas parabólicas.

Las asíntotas verticales se estudian en los puntos de discontinuidad de la función y las demás asíntotas y las ramas parabólicas se estudian cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

A veces puede ser interesante hallar los puntos de corte de las asíntotas horizontales y oblicuas con la gráfica de la función.

9) Tabla con algunos valores significativos de x y de $f(x)$.

Ejemplo 8: Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1) $D = \mathbb{R} - \{1\}$

2) $f(x)$ es continua y derivable en D por ser cociente de polinomios con denominador no nulo.

   $f(x)$ es discontinua en $x = 1$, ya que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0} = +\infty$. Además, no es derivable en este punto por no ser continua.

3) Para estudiar si la gráfica de $f(x)$ es simétrica se halla $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{(x+1)^2}$. Al no coincidir con $f(x)$ ni con $-f(x)$, se concluye que no es simétrica ni respecto del eje OY ni respecto del origen.

4) La periodicidad de la función en este caso no es necesario estudiarla ya que no es trigonométrica.

5) Cortes con los ejes:

   - Con OY, $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
   - Con OX, $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

   Luego el único punto de corte es (0, 0).

6) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

   Se calcula $f'(x) = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{3x^2(x-1) - x^3 2}{(x-1)^3} = \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$

   En la tabla siguiente se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los puntos x = 0, 1, 3 que son los que anulan al denominador o numerador de $f'(x)$.

Signo	$(-\infty, 0)$	(0, 1)	(1, 3)	$(3, +\infty)$
$x-3$	-	-	-	+
$(x-1)^3$	-	-	+	+
$f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$	+	+	-	+
$f(x)$	↑	↑	↓	↑

   La función es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$, (0, 1) y $(3, +\infty)$ y estrictamente decreciente en (1, 3).

   Así en x = 3 hay un cambio de decrecimiento a crecimiento, luego se alcanza en este punto un mínimo relativo. Para dibujarlo se calcula $f(3) = \dfrac{27}{4}$, por lo tanto, el punto mínimo es $\left(3, \dfrac{27}{4}\right)$.

   Observar que en el punto x = 1 también hay cambio de crecimiento a decrecimiento, sin embargo no es máximo de la función ya que este punto no pertenece al dominio.

7) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

   Derivando $f'(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$ se calcula $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - (x^3 - 3x^2)3}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

   En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos determinados por x = 0 y x = 1:

Signo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	-	+	+
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

La función es estrictamente cóncava en $(-\infty, 0)$ y estrictamente convexa en $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. Como en el punto $x = 0$ cambia la concavidad-convexidad estricta de $f(x)$, se deduce que $(0, 0)$ es un punto de inflexión.

8) Asíntotas.

La única asíntota vertical es $x = 1$ ya que 1 es un punto de discontinuidad, como se ha comprobado en el estudio de la continuidad de la función: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$.

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales pudiendo existir asíntotas oblicuas o ramas parabólicas, que se estudian hallando los siguientes límites:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y = x+2 \\ \text{es asíntota oblicua si } x \to +\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y = x+2 \\ \text{es asíntota oblicua si } x \to -\infty \end{array}$$

No hay ramas parabólicas ya que existen asíntotas oblicuas.

Se pueden calcular los puntos de corte de $f(x)$ y la asíntota $y = x + 2$ resolviendo la ecuación: $x + 2 = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

$$x + 2 = \frac{x^3}{(x-1)^2} \iff \frac{x^3}{(x-1)^2} - (x+2) = 0 \iff \frac{x^3 - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = 0 \iff \frac{3x-2}{(x-1)^2} = 0 \iff x = \frac{2}{3}$$

Como $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$, el único punto de corte de la gráfica con la asíntota oblícua es $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

9) Por último podemos construir la siguiente tabla de puntos relevantes obtenidos en los apartados anteriores:

x	$f(x)$
0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
3	$\frac{27}{4}$

Teniendo en cuente el estudio realizado, la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ es: