6. Estudiar y representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{1/x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-x+3}{x+2}$ **c)** $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$

Solución

a) Para estudiar la función $f(x)=e^{1/x}$ se realizan los siguientes pasos:

1) La función no está definida para $x = 0$ ya que anula el denominador de su exponente, por tanto, $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

2) f(x) es continua en D por ser composición de dos funciones continuas ya que una es una función exponencial y la otra una función racional con denominador no nulo y es discontinua en $x = 0$ ya que $0 \notin D$.

   Además, $f(x)$ es derivable en D y su derivada es $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}e^{1/x}$ y no es derivable en $x = 0$ ya que no es continua.

3) Para estudiar si la gráfica de $f(x)$ es simétrica se halla $f(-x)=e^{1/-x}$. Al no coincidir con $f(x)$ ni con $-f(x)$, se concluye que no es simétrica ni respecto del eje OY ni respecto del origen.

4) La periodicidad de la función en este caso no es necesario estudiarla ya que no es trigonométrica.

5) Cortes con los ejes:
   - Con OY, no existe ya que $0 \notin$ D
   - Con OX, no existe ya que $f(x)=e^{1/x}\neq 0$ para cualquier valor de x

6) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

   Teniendo en cuenta que $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}e^{1/x}$ es negativa en D, se tiene que f es estrictamente decreciente para cualquier valor x de D y no tiene extremos relativos.

7) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

   Derivando $f'(x)=\dfrac{-e^{1/x}}{x^2}$ se calcula $f''(x)$ y se estudia su signo de la forma que sigue:

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x^2}e^{1/x}\,x^2+e^{1/x}\,2x}{x^4}=\frac{e^{1/x}\,(1+2x)}{x^4}$$ y $f''(x)=0$ si $1 + 2x = 0$, es decir, si $x=-\dfrac{1}{2}$

   En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos determinados por $x = 0$ y $x=-\dfrac{1}{2}$:

Signo	$\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$	$(0,\ +\infty)$
$1 + 2x$	-	+	+
$f\,''(x)$	-	+	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

La función es estrictamente cóncava en $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$ y estrictamente convexa en $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ y en $(0, +\infty)$. Como en el punto $x = -\frac{1}{2}$ cambia la concavidad-convexidad estricta de $f(x)$ y $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{-1/2}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ se deduce que el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ es un punto de inflexión.

8) Asíntotas.

Para estudiar la existencia de asíntotas verticales se calculan los límites laterales en el punto x = 0 ya que 0 es el único punto de discontinuidad:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

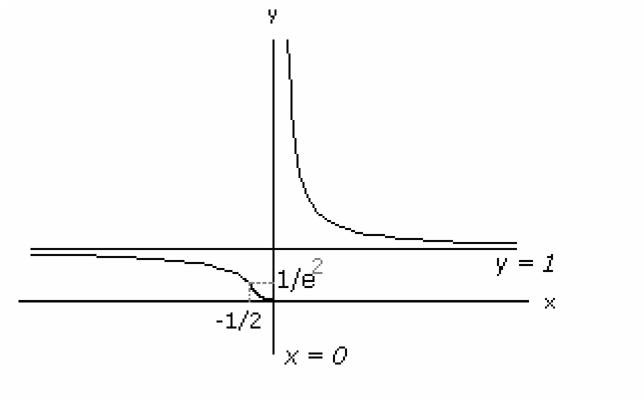
Por tanto la recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función por la derecha y por la izquierda.

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^{1/+\infty} = e^0 = 1 \qquad \lim_{x\to -\infty} e^{1/x} = e^{1/-\infty} = e^0 = 1$$

Por lo tanto, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal de f cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

Teniendo en cuenta el estudio realizado, la gráfica de la función $f(x) = e^{1/x}$ es:



b) Para estudiar la función $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2}$ se realizan los siguientes pasos:

1) $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) $f(x)$ es continua y derivable en D por ser cociente de polinomios con denominador no nulo.

$f(x)$ es discontinua en $x = -2$, ya que la función no está definida en este punto, y por tanto, no es derivable en él.

3) Para estudiar si la gráfica de $f(x)$ es simétrica se halla $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - (-x) + 3}{-x + 2} = \dfrac{x^2 + x + 3}{-x + 2}$. Al no coincidir con $f(x)$ ni con $-f(x)$, se concluye que no es simétrica ni respecto del eje OY ni respecto del origen.

4) Cortes con los ejes:

- Con OY, $x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = \dfrac{3}{2}$
- Con OX, $y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x + 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2}$ que no tiene soluciones reales

Luego el único punto de corte es $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

5) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

Se calcula $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+2) - (x^2 - x + 3)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x - x - 2 - x^2 + x - 3}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$

Resolviendo $x^2 + 4x - 5 = 0$, queda $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$ y por tanto, la derivada se puede escribir como $f'(x) = \dfrac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$

En la tabla siguiente se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los puntos $x = -5, -2, 1$ que son los que anulan al denominador o numerador de $f'(x)$.

Signo	(-∞, -5)	(-5, -2)	(-2, 1)	(1, +∞)
$x+5$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$(x+2)^2$	+	+	+	+
$f'(x) = \dfrac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$	+	-	-	+
$f(x)$	↑	↓	↓	↑

La función es estrictamente creciente en (-∞, -5) y en (1, +∞) y estrictamente decreciente en (-5, -2) y en (-2, 1).

En $x = -5$ hay un cambio de crecimiento a decrecimiento, luego se alcanza en este punto un máximo relativo. Para representarlo se calcula $f(-5) = -11$, por lo tanto, el punto máximo es $(-5, -11)$.

En $x = 1$ hay un cambio de decrecimiento a crecimiento, luego se alcanza en este punto un mínimo relativo. Para representarlo se calcula $f(1) = 1$, por lo tanto, el punto mínimo es $(1, 1)$.

6) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Derivando en $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$ se obtiene $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x-5)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)(x+2)-(x^2+4x-5)2}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x+10}{(x+2)^3} = \frac{18}{(x+2)^3}$$

Para estudiar el signo de $f''(x)$, como su numerador es positivo basta hacerlo en los intervalos determinados por x = -2, único valor que anula su denominador:

- En (-∞, -2), $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ la función es estrictamente cóncava.
- En (-2, +∞), $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ la función es estrictamente convexa.

Notar que en el punto x = -2 cambia la concavidad-convexidad estricta de *f*, pero no es un punto de inflexión ya que no pertenece al dominio de definición.

7) Asíntotas.

Para estudiar la existencia de asíntotas verticales se calculan los límites laterales en x = -2 ya que -2 es el único punto de discontinuidad de *f*:

$$\lim_{x\to(-2)^+} \frac{x^2-x+3}{x+2} = \frac{9}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to(-2)^-} \frac{x^2-x+3}{x+2} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

Por tanto la recta x = -2 es asíntota vertical de la función por la derecha y por la izquierda.

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+3}{x+2} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+3}{x+2} = -\infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales pudiendo existir asíntotas oblicuas o ramas parabólicas, que se estudian hallando los siguientes límites:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-x+3}{x+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+3}{x(x+2)} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-x+3}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+3-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+3}{x+2} = -3$$

Por tanto, la recta y = x – 3 es asíntota oblicua de *f* cuando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x^2-x+3}{x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+3}{x(x+2)} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-x+3}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+3-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+3}{x+2} = -3$$

Por tanto, la recta y = x – 3 es asíntota oblicua de *f* cuando $x \to -\infty$.

No hay ramas parabólicas ya que existen asíntotas oblicuas.

Se pueden calcular los puntos de corte de $f(x)$ y la asíntota y = x – 3 resolviendo la ecuación: $x-3=\dfrac{x^2-x+3}{x+2}$ de la siguiente manera:

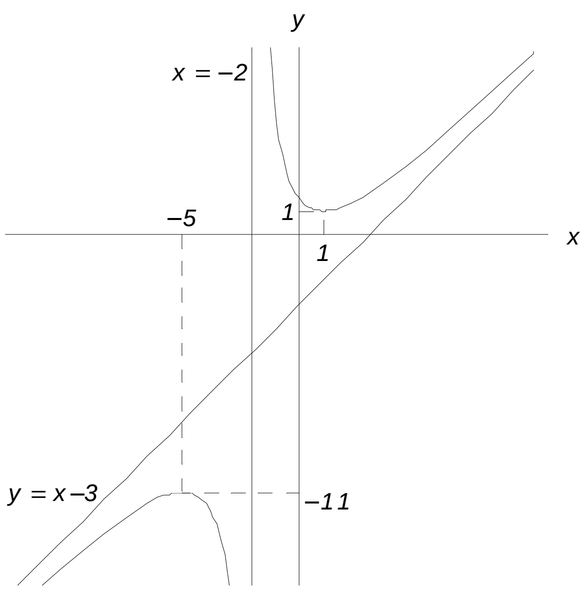
$$x-3=\frac{x^2-x+3}{x+2} \iff x-3-\frac{x^2-x+3}{x+2}=0 \iff \frac{-9}{x+2}=0$$

Como la ecuación anterior no tiene solución, se concluye que la gráfica no corta a la asíntota oblicua.

8) Por último podemos construir la siguiente tabla de puntos relevantes obtenidos en los apartados anteriores:

x	$f(x)$
0	$\frac{3}{2}$
-5	-11
1	1

Teniendo en cuenta el estudio realizado, la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+3}{x+2}$ es:



c) Para estudiar la función $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$ se realizan los siguientes pasos:

1) Para hallar el dominio hay que tener en cuenta que el logaritmo neperiano sólo está definido si $\dfrac{x}{x+1}>0$, para resolver esta inecuación se consideran los siguientes casos:

- si $x > 0$ y $x + 1 > 0$ $\Rightarrow$ $x > 0$ y $x > -1$ $\Rightarrow$ $x \in (0, +\infty)$
- si $x < 0$ y $x + 1 < 0$ $\Rightarrow$ $x < 0$ y $x < -1$ $\Rightarrow$ $x \in (-\infty, -1)$

Por tanto, $D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

2) $f(x)$ es continua y derivable en D por ser composición de funciones continuas y derivables.
3) Para estudiar si la gráfica de $f(x)$ es simétrica se halla $f(-x) = \ln\frac{-x}{-x+1}$. Al no coincidir con $f(x)$ ni con $-f(x)$, se concluye que no es simétrica ni respecto del eje OY ni respecto del origen.
4) Cortes con los ejes:
   - Con OY, no existen ya que $0 \notin D$
   - Con OX, $y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \ln\frac{x}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x+1} - 1 = 0 \quad \Rightarrow$

     $\Rightarrow \quad \frac{x-x-1}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{x+1} = 0$, ecuación que no tiene solución

   Luego no existen puntos de corte con los ejes.

5) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

   Se calcula $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{(x+1)^2}}{\dfrac{x}{x+1}} = \dfrac{1}{x(x+1)}$

   Para estudiar su signo sólo hay que considerar los intervalos dados por los puntos x = -1, 0 que son los que anulan el denominador puesto que el numerador no se anula. En la tabla siguiente se estudia el signo de $f'(x)$:

Signo	(-∞, -1)	(0, +∞)
x	-	+
$x+1$	-	+
$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$	+	+
$f(x)$	↑	↑

   La función es estrictamente creciente en D, por lo tanto no tiene máximos ni mínimos relativos.

6) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

   Escribiendo $f'(x) = \frac{1}{x^2+x}$ y derivando se calcula $f''(x) = \frac{-2x-1}{\left(x^2+x\right)^2} = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$

   Como $f''(x)$ se anula si $-2x - 1 = 0$, es decir, si $x = -\frac{1}{2}$ que no pertenece a D, y su denominador es positivo en D, se tiene :
   - En (-∞, -1), $f''(x) > 0 \quad \Rightarrow$ la función es estrictamente convexa.
   - En (0, +∞), $f''(x) < 0 \quad \Rightarrow$ la función es estrictamente cóncava.

   Como no existe ningún punto en el que f cambie su concavidad-convexidad estricta, se deduce que f no tiene puntos de inflexión.

7) Asíntotas.

Para estudiar la existencia de asíntotas verticales, como *f* sólo está definida a la izquierda de *x* = -1 y a la derecha de *x* = 0, se calculan los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \ln\frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x}{x+1} = \ln\frac{-1}{0^-} = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+1} = \ln\frac{0^+}{1} = \ln 0 = -\infty$$

Por tanto la recta *x* = -1 es asíntota vertical de la función por la izquierda.

Por tanto la recta *x* = 0 es asíntota vertical de la función por la derecha.

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = \ln 1 = 0$$

Por tanto, la recta *y* = 0 es asíntota horizontal de *f* cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

Teniendo en cuenta el estudio realizado, la gráfica de la función $f(x) = \ln\frac{x}{x+1}$ es: