5. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^3-3x-8 & \text{si} \quad x\le 3 \\ \dfrac{2}{a-x} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

a) Calcular los valores del parámetro *a* para los que *f*(*x*) es continua en *x* = 3.

b) Para *a* = 0 estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos de la función.

c) Para *a* = 5 estudiar las asíntotas y ramas parabólicas de la función.

Solución

a) Para que *f*(*x*) sea continua en *x* = 3 se tiene que verificar $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{a-x}=\frac{2}{a-3} \quad , \quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(x^3-3x-8\right)=27-9-8=10 \quad , \quad f(3)=10$$

Igualando queda $\dfrac{2}{a-3}=10$ y despejando se tiene a = $\dfrac{16}{5}$

b) Para *a* = 0, la función a estudiar es $f(x)=\begin{cases} x^3-3x-8 & \text{si} \quad x\le 3 \\ \dfrac{2}{-x} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

La derivada de esta función es $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & \text{si} \quad x<3 \\ \dfrac{2}{x^2} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$ y en *x* = 3 la función no es derivable ya que no es continua puesto que *a* = 0 $\neq \dfrac{16}{5}$

Los puntos críticos se calculan a continuación:

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x = 1 \text{ y } x = -1$$

Además también es punto crítico *x* = 3 ya que la función no es derivable en él.

Se estudia el signo de la derivada en los siguientes casos:

- En (-∞, -1), $f'(x)=3(x+1)(x-1)$ > 0, luego *f* es estrictamente creciente.
- En (-1, 1), $f'(x)=3(x+1)(x-1)$ < 0, luego *f* es estrictamente decreciente.
- En (1, 3), $f'(x)=3(x+1)(x-1)$ > 0, luego *f* es estrictamente creciente.
- En (3, +∞), $f'(x)=\dfrac{2}{x^2}$ > 0, luego *f* es estrictamente creciente.

En el punto *x* = -1, la función cambia de estrictamente creciente a estrictamente decreciente por lo tanto en *x* = -1 hay un máximo relativo de *f* y en *x* = 1, la función cambia de estrictamente decreciente a estrictamente creciente por lo tanto, en *x* = 1 hay un mínimo relativo de *f*.

c) Para *a* = 5 la función queda $f(x)=\begin{cases} x^3-3x-8 & \text{si} \quad x\le 3 \\ \dfrac{2}{5-x} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

Para hallar las asíntotas verticales se estudian los límites laterales en el punto *x* = 5 ya que es el único que anula el denominador quedando:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{2}{5-x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{2}{5-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Por tanto, la recta $x = 5$ es asíntota vertical de f por la derecha y por la izquierda.

Para hallar las asíntotas horizontales, oblicuas y ramas parabólicas hay que estudiar los límites en las dos direcciones, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{5-x} = \dfrac{2}{-\infty} = 0 \quad \Rightarrow$ la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3 - 3x - 8\right) = -\infty \quad \Rightarrow$ la función no tiene asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x - 8}{x} = +\infty \quad \Rightarrow$ la función tiene una rama parabólica de eje horizontal cuando $x \to -\infty$