4. Dada la función $f(x) = ax^4 + 4ax^3 + 6ax^2 + x^2 - bx + 4ax + 2x - b + a - 1$, calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que en *x* = -2 tenga un punto de inflexión y para que su gráfica pase por el punto $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

Solución

Para que *x* = -2 sea un punto de inflexión de *f* es necesario que $f''(-2) = 0$. Derivando se obtiene:

$$f'(x) = 4ax^3 + 12ax^2 + 12ax + 2x - b + 4a + 2$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 24ax + 12a + 2 \quad \Rightarrow \quad f''(-2) = 12a(-2)^2 + 24a(-2) + 12a + 2 = 12a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{6}$$

Para comprobar si *f* tiene en *x* = -2 un punto de inflexión veamos si $f'''(-2) \neq 0$. Derivando se obtiene: $f'''(x) = 24ax + 24a \quad \Rightarrow \quad f'''(-2) = 24a(-2) + 24a = -24a$

sustituyendo $a = -\frac{1}{6}$ queda $f'''(-2) = -24\left(\frac{-1}{6}\right) = 4 \neq 0$. Por tanto, *x* = -2 es punto de inflexión de *f*.

Si la gráfica de *f* pasa por el punto $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ se verifica $f(1) = \frac{2}{3}$, es decir:

$$f(1) = -\frac{1}{6} - 4\frac{1}{6} - 6\frac{1}{6} + 1 - b - 4\frac{1}{6} + 2 - b - \frac{1}{6} - 1 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3} - 2b = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{2}{3}$$