3. Dada la función $f(x) = \ln \frac{x+3}{x-3}$, determinar:

a) el dominio de definición **b)** el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos

c) la concavidad , la convexidad y los puntos de inflexión

Solución

a) La función $f(x) = \ln \frac{x+3}{x-3}$ es composición de una función logarítmica y una racional, por tanto, para calcular su dominio hay que tener en cuenta que las dos estén definidas.

El logaritmo neperiano sólo se puede hallar si $\frac{x+3}{x-3} > 0$. Luego hay que considerar dos casos:

- $x+3>0$ y $x-3>0$ $\Leftrightarrow$ $x>-3$ y $x>3$ $\Leftrightarrow$ $x \in (3, +\infty)$
- $x+3<0$ y $x-3<0$ $\Leftrightarrow$ $x<-3$ y $x<3$ $\Leftrightarrow$ $x \in (-\infty, -3)$

Además, para que no se anule el denominador de la fracción ha de ser $x \neq 3$.

Por tanto, $D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

b) Para estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos se halla $f'(x)$ quedando

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+3}{x-3}} \frac{x-3-(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{1}{x+3} \cdot \frac{-6}{x-3} = \frac{-6}{(x+3)(x-3)}$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f'(x)$ en $D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$:

Signo	$(-\infty, -3)$	$(3, +\infty)$
$x+3$	-	+
$x-3$	-	+
$f'(x) = \frac{-6}{(x+3)(x-3)}$	-	-
$f(x)$	↓	↓

Por tanto, f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ y no tiene máximos ni mínimos relativos.

c) Para estudiar la concavidad , la convexidad y los puntos de inflexión se halla $f''(x)$ derivando en $f'(x) = \frac{-6}{(x+3)(x-3)} = \frac{-6}{x^2-9}$, obteniéndose $f''(x) = \frac{12x}{(x^2-9)^2}$.

El signo de $f''(x)$ en D depende únicamente del signo de x, ya que su denominador es siempre positivo, así:

- En $(-\infty, -3)$, $f''(x) < 0$, luego f es estrictamente cóncava.
- En $(3, +\infty)$, $f''(x) > 0$, luego f es estrictamente convexa.

Por tanto, la función no tiene puntos de inflexión ya que no existe ningún punto en el que cambie la concavidad-convexidad estricta de la función.