2. Hallar, si existen, las asíntotas de la función $f(x) = xe^{1/x}$

Solución

• *Asíntotas verticales*

El único punto en el que la función no está definida es $x = 0$, por tanto es punto de discontinuidad de f y candidato a determinar una asíntota vertical. Para comprobarlo se calculan los límites laterales cuando x tiende a 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = 0\, e^{1/0^+} = 0\, e^{+\infty} = \left[0(+\infty)\right]$, para resolver esta indeterminación se procede

como sigue: $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0\, e^{1/0^-} = 0\, e^{-\infty} = 0.0 = 0$

Por tanto, se concluye que la recta $x = 0$ es asíntota vertical de f por la derecha y no lo es por la izquierda.

• *Asíntotas horizontales*

Cuando x tiende a $+\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{1/x} = +\infty\, e^{1/+\infty} = +\infty\, e^0 = +\infty\ 1 = +\infty$, luego, no existe asíntota horizontal en esta dirección.

Cuando x tiende a $-\infty$: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} xe^{1/x} = -\infty\, e^{1/-\infty} = -\infty\, e^0 = -\infty\ 1 = -\infty$, luego, tampoco existe asíntota horizontal en esta dirección.

• *Asíntotas oblicuas*

Son de la forma $y = m\,x + n$ y al no haberse obtenido asíntotas horizontales ni cuando x tiende a $+\infty$ ni cuando x tiende a $-\infty$, las asíntotas oblicuas se han de buscar en ambas direcciones.

Cuando x tiende a $+\infty$: $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{xe^{1/x}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^{1/+\infty} = e^0 = 1$

$$n = \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to +\infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x\to +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \left[+\infty\, 0\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = = \lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^{1/+\infty} = e^0 = 1$$

Cuando x tiende a $-\infty$: $m = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{xe^{1/x}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} e^{1/x} = e^{1/-\infty} = e^0 = 1$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to-\infty}(xe^{1/x}-x) = \lim_{x\to-\infty} x(e^{1/x}-1) = \left[-\infty\, 0\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} e^{1/x} = e^{1/-\infty} = e^0 = 1\,.$$

Por tanto, la recta $y = x + 1$ es asíntota oblicua de f cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.