*Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal*

**1.** Estudiar el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones:

**a)** $f(x) = 7x^3 + 3x + 1$ **b)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 3-5x & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

**Solución**

**a)** La función $f(x) = 7x^3 + 3x + 1$ es derivable en su dominio, $D$ = (-∞, +∞), por ser un polinomio y su derivada es $f'(x) = 21x^2 + 3$.

Para determinar el crecimiento y decrecimiento de *f*, se estudia el signo de $f'(x)$ que en este caso es siempre positivo, por tanto, *f* es estrictamente creciente en (-∞, +∞) y no tiene máximos ni mínimos relativos.

**b)** La función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ es derivable en su dominio, $D$ = (0, +∞), y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

El signo de $f'(x)$ depende del signo de su numerador ya que el denominador es siempre positivo. El signo de $1 - \ln x$ cambia en los puntos que lo anulan: $1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

Se divide el dominio en los dos intervalos determinados por $x = e$ y se estudia el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos, obteniéndose:

- En (0, *e*), se verifica $\ln x < 1$, por tanto $f'(x) > 0$, y por ello *f* es estrictamente creciente.
- En (*e*, +∞), se verifica $\ln x > 1$, por tanto $f'(x) < 0$, y por ello *f* es estrictamente decreciente.

De lo anterior se deduce que en $x = e$ la función cambia de estrictamente creciente a estrictamente decreciente, por tanto, *f* tiene un máximo relativo estricto en dicho punto.

**c)** Como la función $f(x) = \begin{cases} 3-5x & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ está definida a trozos, su estudio se realiza por separado en cada uno de los intervalos en los que tiene distinta definición:

- En (-∞, 1), $f'(x) = -5 < 0$, luego *f* es estrictamente decreciente.
- En (1, +∞), $f'(x) = 6x > 0$, luego *f* es estrictamente creciente.

En $x = 1$, la función cambia de estrictamente decreciente a estrictamente creciente, como además *f* es continua en $x = 1$ $\left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x^2-5\right) = -2,\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(3-5x\right) = -2 \text{ y } f(1) = -2\right)$, se deduce que *f* tiene un mínimo relativo en dicho punto.