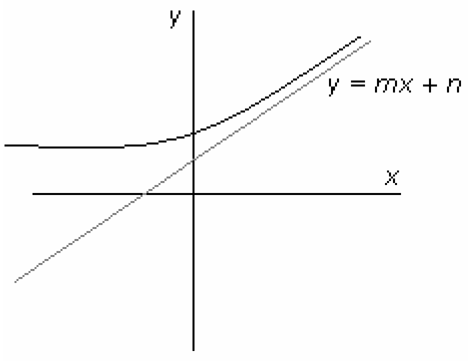
La recta $y = mx + n$ con $m \neq 0$, es **asíntota oblicua** de $y = f(x)$ si se cumple:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx + n) \right) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (mx + n) \right) = 0$$

Los valores de m y n se calculan de la forma que sigue:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx \qquad \text{o} \qquad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx$$

Notar que la existencia de asíntota horizontal en una dirección (+∞ o -∞) implica que no puede existir en dicha dirección asíntota oblicua. Ahora bien lo que ocurre en una dirección es independiente de lo que pasa en la otra.



Asíntota oblicua

Ejemplo 7:

a) Calcular las asíntotas, si existen, de la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$

La única recta candidata a ser asíntota vertical es $x = 0$ ya que al anular el denominador puede dar lugar a que el límite de la función sea infinito. Para comprobarlo hallamos los límites laterales de la función,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Luego, $x = 0$ es asíntota vertical de *f* por la derecha y por la izquierda ya que ambos límites dan infinito.

Para determinar si existen asíntotas horizontales hay que hallar los límites siguientes:

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} = +\infty$, al no haberse obtenido un número real, no existe asíntota horizontal si $x \to +\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty$, al no haberse obtenido un número real, no existe asíntota horizontal si $x \to -\infty$

Como en las dos direcciones anteriores no existen asíntotas horizontales, *f* puede tener asíntotas oblicuas. Par determinarlo se calculan los límites siguientes:

$$\begin{cases} m = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^3}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3} = 1 \\ n = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + 3x - 1}{x^2} = -3 \end{cases}$$

luego, $y = x - 3$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3} = 1 \\ n = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 + 3x - 1}{x^2} = -3 \end{cases}$$

luego, $y = x - 3$ también es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

b) Calcular las asíntotas, si existen, de la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$

La única asíntota vertical es $x = 1$ ya que 1 es un punto de discontinuidad, como se ha comprobado en el estudio de la continuidad de la función: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$.

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales pudiendo existir asíntotas oblicuas o ramas parabólicas, que se estudian hallando los siguientes límites:

$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 \\ n &= \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y = x + 2 \\ \text{es asíntota oblicua si } x \to +\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 \\ n &= \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y = x + 2 \\ \text{es asíntota oblicua si } x \to -\infty \end{array}$$

Se pueden calcular los puntos de corte de $f(x)$ y la asíntota $y = x + 2$ resolviendo la ecuación: $x + 2 = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

$$x + 2 = \frac{x^3}{(x-1)^2} \iff \frac{x^3}{(x-1)^2} - (x+2) = 0 \iff \frac{x^3 - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = 0 \iff \frac{3x - 2}{(x-1)^2} = 0 \iff x = \frac{2}{3}$$

Como $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$, el único punto de corte de la gráfica con la asíntota oblícua es $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.