ASÍNTOTAS Y RAMAS PARABÓLICAS

Estos conceptos surgen al estudiar el comportamiento de la función en el infinito.

Asíntotas

Una recta r es **asíntota** de $y = f(x)$ si la gráfica de la función se acerca indefinidamente a alguno de los "extremos" de la recta r.

La recta $x = a$ es **asíntota vertical** de $y = f(x)$ si se cumple $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

La recta $y = b$ es **asíntota horizontal** de $y = f(x)$ si se cumple $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

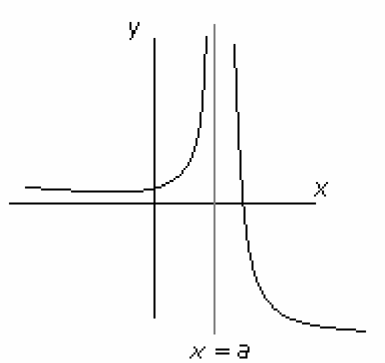
La recta $y = mx + n$ con $m \neq 0$, es **asíntota oblicua** de $y = f(x)$ si se cumple:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx + n)\right) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (mx + n)\right) = 0$$

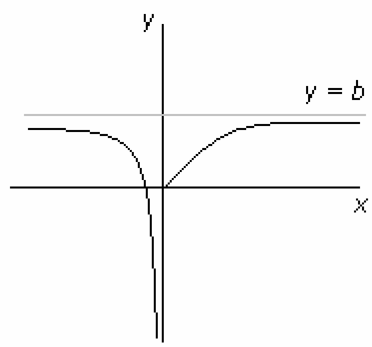
Los valores de m y n se calculan de la forma que sigue:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx \qquad \text{o} \qquad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx$$

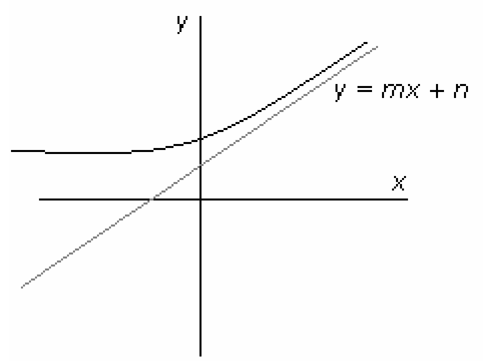
Notar que la existencia de asíntota horizontal en una dirección (+∞ o -∞) implica que no puede existir en dicha dirección asíntota oblicua. Ahora bien lo que ocurre en una dirección es independiente de lo que pasa en la otra.



Asíntota vertical



Asíntota horizontal



Asíntota oblicua

Ejemplo 7: Calcular las asíntotas, si existen, de la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$

La única recta candidata a ser asíntota vertical es $x = 0$ ya que al anular el denominador puede dar lugar a que el límite de la función sea infinito. Para comprobarlo hallamos los límites laterales de la función,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Luego, $x = 0$ es asíntota vertical de f por la derecha y por la izquierda ya que ambos límites dan infinito.

Para determinar si existen asíntotas horizontales hay que hallar los límites siguientes:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} = +\infty$, al no haberse obtenido un número real, no existe asíntota horizontal si $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty$, al no haberse obtenido un número real, no existe asíntota horizontal si $x \to -\infty$

Como en las dos direcciones anteriores no existen asíntotas horizontales, f puede tener asíntotas oblicuas. Par determinarlo se calculan los límites siguientes:

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2+3x-1}{x^2} = -3 \end{cases}$$

luego, $y = x-3$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} - x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^2+3x-1}{x^2} = -3 \end{cases}$$

luego, $y = x-3$ también es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

Ramas Parabólicas

Una función f tiene rama parabólica horizontal, vertical u oblicua si la gráfica de f cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, se comporta como si formara parte de una parábola de eje horizontal, vertical u oblicuo respectivamente.

Cada tipo de rama parabólica se caracteriza por:

a) *Rama parabólica de eje horizontal*

- Cuando $x \to +\infty$, si se cumple $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
- Cuando $x \to -\infty$, si se cumple $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

b) *Rama parabólica de eje vertical*

- Cuando $x \to +\infty$, si se cumple $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$
- Cuando $x \to -\infty$, si se cumple $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

c) *Rama parabólica de eje oblicuo* $y = mx$

- Cuando $x \to +\infty$, si se cumple:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \neq 0,\ \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \pm\infty$

- Cuando $x \to -\infty$, si se cumple:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \neq 0,\ \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \pm\infty$

Notar que la existencia en una dirección de asíntota horizontal u oblicua cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ impide que haya rama parabólica en esa misma dirección.

Ejemplo 8: Estudiar si la función $f(x) = 3x^2e^{-2x}$ tiene ramas parabólicas.

• En la dirección $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{e^{2x}} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x}{2e^{2x}} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{4e^{2x}} = \dfrac{6}{+\infty} = 0$, luego $y = 0$ es una asíntota horizontal si $x \to +\infty$, así no hay rama parabólica en esta dirección.

• En la dirección -∞

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2e^{-2x} = (+\infty)e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$, luego no hay asíntota horizontal si $x \to -\infty$ y existe la posibilidad de rama parabólica.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2e^{-2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3xe^{-2x} = (-\infty)e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$, por lo tanto, tiene una rama parabólica de eje vertical cuando $x \to -\infty$.