

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Gráficamente el que una función $f(x)$ sea continua en un punto x_0 , significa que no se rompe su gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$, es decir, se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel en las proximidades de dicho punto.

Intuitivamente la continuidad de $f(x)$ en x_0 quiere decir que variaciones pequeñas de la variable x cuando está próxima a x_0 , le corresponden variaciones pequeñas de $f(x)$.

A continuación se formaliza el concepto de función continua.

Una función real $f(x)$ es **continua** en x_0 si se cumple $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se dice que f es función continua en un subconjunto A si lo es en todos los puntos de A .

Ejemplo 17: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$a) f(x) = \begin{cases} 5x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en el punto } x = 1.$$

Se calculan los límites laterales ya que la función tiene distinta definición por la derecha y por la izquierda del punto:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+3 = 5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 5x^2 = 5, \text{ luego } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5.$$

Además, como $f(1) = 5$ y coincide con $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, se cumple que f es continua en el punto $x = 1$.

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en el punto } x = 1.$$

Se calcula $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1) = 1$ y como $f(1) = 0$, se cumple que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ y por tanto, f no es continua en el punto $x = 1$.

$$c) f(x) = \frac{1}{(x-3)^4} \quad \text{en el punto } x = 3$$

En este caso no existe $f(3)$, ya que 3 anula el denominador, por tanto, f no es continua en el punto $x = 3$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+e^{-1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en el punto } x = 0.$$

Como $e^{-1/x}$ tiene distinto límite según x tienda a 0 por la derecha o por la izquierda, para obtener $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1+e^{-1/x}}$ se

$$\text{calculan los límites laterales: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = \frac{2}{1+e^{-\infty}} = \frac{2}{1+0} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = \frac{2}{1+e^{+\infty}} = \frac{2}{1+\infty} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Como estos límites no coinciden, entonces no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, y por ello, f no es continua en $x = 0$.

Tipos de discontinuidades de una función

Si f no es continua en un punto x_0 se dice que es **discontinua** en dicho punto. Esto puede producirse por varias causas, dando lugar a distintos tipos de discontinuidades que se enumeran a continuación.

- **Discontinuidad evitable:** si existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$. En este caso, al ser discontinua o bien $x_0 \notin D$, o bien $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Este tipo de discontinuidad permite redefinir la función de forma continua de la manera siguiente:

$$\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

- **Discontinuidad no evitable,** si no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$. Esta situación se puede producir por las siguientes razones:
 - existe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$ pero son distintos.
 - existe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
 - no existe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ o no existe $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Ejemplo 18:

- a) La función $f(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$ ya que no existe $f(0)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ (se ha aplicado el infinitésimo equivalente $\text{sen}x \sim x$ si $x \rightarrow 0$).

Por tanto, esta función se puede redefinir para que sea continua de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- b) La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ presenta una discontinuidad no evitable en $x = 2$, puesto que sus límites laterales, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$, son distintos.

- c) La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ presenta una discontinuidad no evitable en $x = 0$, ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ no es un número real.

- d) La función $f(x) = \text{sen} \frac{1}{x}$ presenta una discontinuidad no evitable en 0, ya que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \frac{1}{x}$.

Propiedades de las funciones continuas

1. Si f es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces, existe un entorno de x_0 en el cual f tiene el mismo signo que $f(x_0)$.
2. Si f es continua en x_0 , entonces, existe un entorno de x_0 en el cual f está acotada.
3. Todas las funciones elementales definidas anteriormente (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas ...) son continuas en sus dominios de definición.
4. Si f y g son dos funciones continuas en x_0 , se verifica:

$f \pm g$, $f \cdot g$, $t \cdot f$ con t número real y $\frac{f}{g}$ con $g(x_0) \neq 0$ son funciones continuas en x_0

5. Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces, $g \circ f$ es continua en x_0 .

Ejemplo 19: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $(-\infty, 0)$ la función es continua por ser polinómica.

En $(0, +\infty)$ la función es continua por ser una función exponencial.

En $x = 0$, es necesario calcular los límites laterales por estar $f(x)$ definida de distinta manera por la derecha e izquierda del punto; así, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x+1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} = 1$ y por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Además, $f(0) = 1$ coincide con el valor del límite hallado, luego, f es continua en 0.

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En $(-\infty, 1)$ la función es continua por ser una función racional con denominador no nulo.

En $(1, +\infty)$ la función es continua por ser una función exponencial.

En $x = 1$ se tiene: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$, como no coinciden los límites laterales no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y por tanto, f es discontinua no evitable.

$$c) f(x) = \ln(x+2)$$

La función es continua en su dominio por ser una función logarítmica.

Para calcular su dominio hay que tener en cuenta que el logaritmo sólo se puede calcular de expresiones positivas, luego, $x+2 > 0$, es decir, $x > -2$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $(-2, +\infty)$.