Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

FUNCIONES ELEMENTALES

La mayoría de las funciones con las que se trabaja se obtienen al operar con unas pocas funciones llamadas **funciones elementales**. A continuación se ven con detalle algunas de las más utilizadas.

Funciones Polinómicas

Una función polinómica de **grado *n*** es de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $n \in \mathbb{N}$ $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$.

Funciones Racionales

Son funciones de la forma $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas.

El dominio esta formado por todos los números reales que no son raíces del polinomio del denominador.

Funciones Irracionales

Son funciones de la forma $f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$ donde $R(x)$ es una función racional y n un número natural mayor que 1.

Si n es impar el dominio de esta función es igual al dominio de $R(x)$. Si n es par el dominio de esta función está formado por todos los números reales para los que $R(x) \geq 0$.

Ejemplo 6:

a) La función $f(x) = x^5 + 7x^3 - 4$ es polinómica de grado 5 y su dominio es $\mathbb{R}$.

b) La función $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+1}$ es racional y su dominio es $\mathbb{R}$, ya que, $x^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor x.

c) La función $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ es irracional y como el índice de la raíz es par (n = 2), para calcular su dominio hay que estudiar cuando $x^2 - 1 \geq 0$. Para resolver esta inecuación (Ver unidad 2), se factoriza el polinomio quedando $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ y se estudia su signo en la tabla siguiente

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
$x+1$	-	+	+
$x-1$	-	-	+
x^2-1	+	-	+

Por lo tanto, el dominio es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, ya que se han de incluir 1 y -1 puesto que cumplen la desigualdad por ser ésta no estricta.

Funciones Exponenciales

Son funciones de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$.

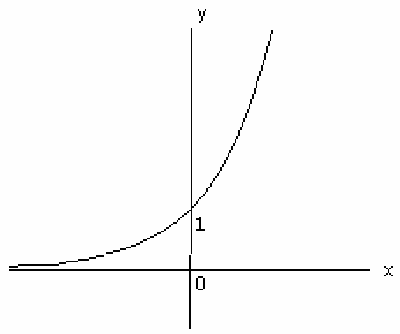
El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ y su imagen $(0, +\infty)$.

A continuación se enumeran algunas propiedades de las potencias que resultan muy útiles a la hora de trabajar con las funciones exponenciales (Ver unidad 1):

$a^0 = 1$ $\quad a^{x+y} = a^x a^y$ $\quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$

$(a\ b)^x = a^x\ b^x$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\quad a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$

La función exponencial más utilizada es $f(x) = e^x$ cuya gráfica se muestra en la siguiente figura, de ella se deduce que es estrictamente creciente, estrictamente convexa y acotada inferiormente en R.



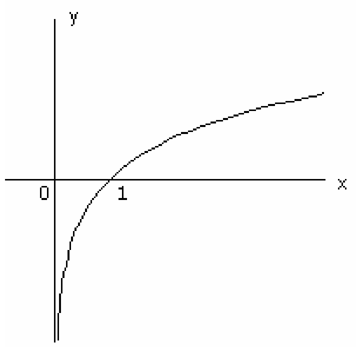
Funciones Logarítmicas

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

El dominio de estas funciones es $(0, +\infty)$ y su imagen R.

La función $f(x) = \log_a x$ es la función inversa de la función exponencial a^x con $a > 0$.

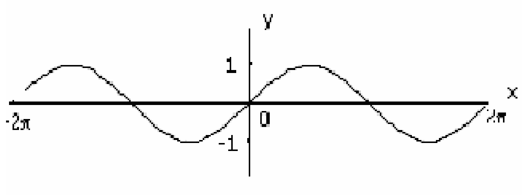
La función logarítmica más utilizada es la que viene dada por el logaritmo neperiano, es decir, la que tiene por base el número *e*, que es la función inversa de $f(x) = e^x$. Se representa por $f(x) = \ln x$ y su gráfica se muestra en la siguiente figura de la que se deduce que es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y no acotada superior ni inferiormente.



Algunas funciones Trigonométricas

La **función seno** viene dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$

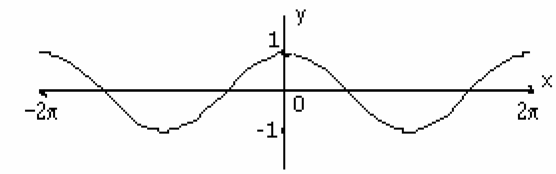
Su dominio es R, su imagen [-1, 1] y su gráfica es la siguiente:



Como se observa en el dibujo anterior, está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1, es periódica de periodo 2π e impar.

La **función coseno** viene dada por $f(x) = \cos x$

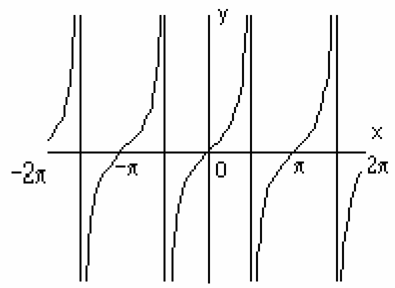
Su dominio es R, su imagen [-1, 1] y su gráfica es la siguiente:



Como se observa en el dibujo anterior, está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1, es periódica de periodo 2π y par.

La **función tangente** viene dada por $f(x) = \mathrm{tg}x$

Como $\mathrm{tg}x = \dfrac{\mathrm{sen}x}{\cos x}$, su dominio es D = R - $\left\{ (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$, su imagen R y su gráfica es la siguiente:

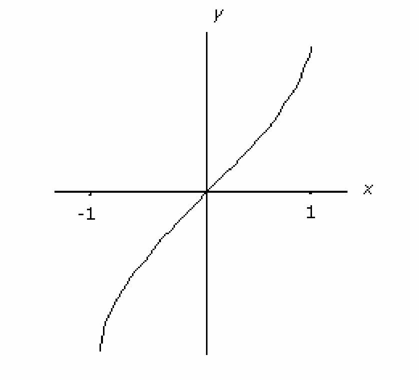


Como se observa en el dibujo anterior, no está acotada superior ni inferiormente , es periódica de periodo π e impar.

Las funciones inversas de las anteriores son:

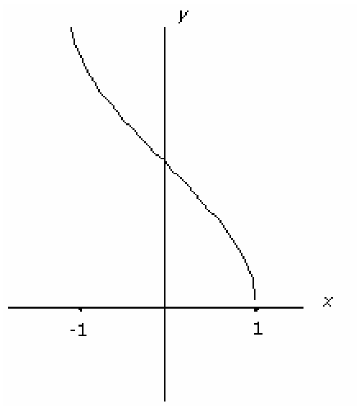
La **función arco seno** es la inversa de la función seno y se denota $f(x) = \mathrm{arcsen}x$.

Su dominio es [-1, 1] y su gráfica



La **función arco coseno** es la inversa del coseno y se denota $f(x) = \arccos x$.

Su dominio es [-1, 1] y su gráfica



La **función arco tangente** es la inversa de la tangente y se denota $f(x) = \text{arctg} x$.

Su dominio es R y su gráfica