CONCEPTOS BÁSICOS

Se llama **función real de variable real** a cualquier aplicación $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$, es decir, a cualquier correspondencia que asocia a cada elemento de D un único número real.

Habitualmente, la notación que se usa para representar una función es $y = f(x)$, donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y f la aplicación que indica como se obtiene el valor de y conocido el valor de x.

Se llama **dominio de definición de *f*** al conjunto de números reales x para los cuales existe $f(x)$. Se denota $D(f)$, o simplemente D. Es decir, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } f(x)\}$.

En algunos casos, el dominio de la función no viene dado a priori sino que hay que calcularlo mediante la definición de f. Además, en los modelos económicos para determinar el dominio no sólo hay que considerar la existencia matemática de $f(x)$, sino también que tenga sentido en el contexto económico considerado tanto x como $f(x)$.

Ejemplo 1:

a) $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt[4]{x-2}$ es una función real de variable real cuyo dominio es $D = [2, +\infty)$.

b) $y = \dfrac{1}{x-2}$ es una función con $D = \mathbb{R} - \{2\}$ ya que asocia a todo número real distinto de 2 un único elemento de $\mathbb{R}$.

c) La correspondencia dada por $y^2 = x$ no es una función, ya que a cada número real positivo x no nulo le asocia dos valores reales distintos, por ejemplo, para $x = 4$, el valor de la variable y puede ser 2 o -2.

d) El dominio de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ es $D = (0, +\infty)$ ya que para que exista $\sqrt{x}$, x debe de ser mayor o igual que 0, y además como está en el denominador no puede ser 0.

e) El coste C por día de una empresa es función de su producción diaria q según la relación $C = 500 + 15q$. Si la empresa tiene una capacidad límite de producir 5000 unidades al día, el dominio de esta función es $D = \{ q \mid 0 \le q \le 5000 \}$.

Observar que desde el punto de vista matemático, el dominio de esta función sería $\mathbb{R}$, sin embargo por el contexto económico el dominio se restringe al calculado.

Se llama **rango** o **imagen de *f*** al conjunto de números reales que toma la variable y siendo $y = f(x)$ y x perteneciente al dominio de f. Se denota $\mathrm{Im}(f)$.

Es decir, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in D \text{ con } y = f(x)\}$.

Ejemplo 2:

a) Dada $f(x) = \sqrt{x-1}$, para que exista $f(x)$ se debe cumplir que $x - 1 \ge 0$, ya que no existe la raíz cuadrada de números negativos. Por tanto, se debe cumplir $x \ge 1$ y por ello $D = [1, +\infty)$.

Además, se verifica que $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$.

b) La función $C = 500 + 15q$, estudiada en el ejemplo 1 apartado e), cuyo dominio es $D = \{ q \mid 0 \le q \le 5000 \}$, tiene como imagen $\mathrm{Im}(f) = \{ C \mid 500 \le C \le 75500 \}$.

c) Dada $f(x) = x^5 + x - 3$, al estar definida por un polinomio existe para cualquier número real, luego $D = \mathbb{R}$. Además, se verifica que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

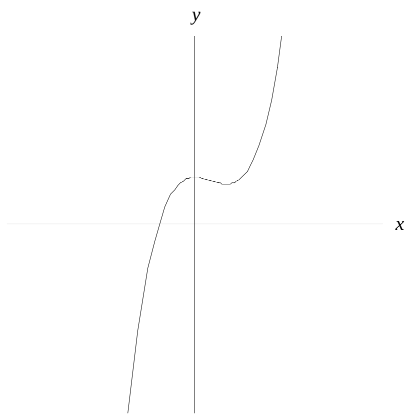
d) Dada $f(x) = x^2 + 3$, se cumple que su dominio es $D = \mathbb{R}$ y su imagen Im(f) = $[3, +\infty)$.

Se llama **gráfica de *f*** al conjunto de todos los pares de números reales que tienen como primera componente cualquier valor x del dominio de f y como segunda su imagen $f(x)$. Se denota Gr(f). Es decir, Gr(f) = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, y = f(x)\}$.

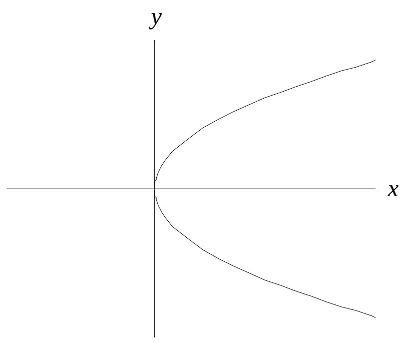
Notar que la gráfica de f es una curva en $\mathbb{R}^2$ pero no todas curvas del plano son gráficas de funciones. La gráfica de una función tiene la propiedad de que una recta vertical que pase por cualquier punto del eje OX la corta a lo sumo una vez, en caso contrario, significaría que un mismo número tendría más de una imagen por lo que no sería aplicación, y por tanto tampoco función.

Ejemplo 3:

a) La gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ es:



La curva representada a continuación dada por los puntos que verifican $y^2 = x$ no corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$.



Tipos de funciones

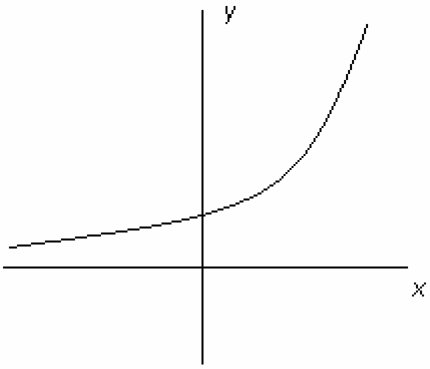
- Una función $f(x)$ se dice:

  Función **creciente** en un intervalo $I \subseteq D$ si para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

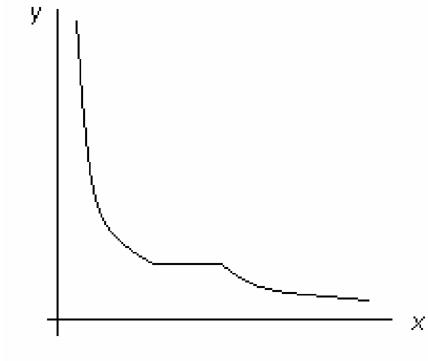
Función **estrictamente creciente** en un intervalo $I \subseteq D$ si para cualquier par de puntos $x_1,\ x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) < f(x_2)$.

Función **decreciente** en un intervalo $I \subseteq D$ si para cualquier par de puntos $x_1,\ x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Función **estrictamente decreciente** en un intervalo $I \subseteq D$ si para cualquier par de puntos $x_1,\ x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) > f(x_2)$.



Función estrictamente creciente en R



Función decreciente, pero no estrictamente decreciente en (0, +∞)

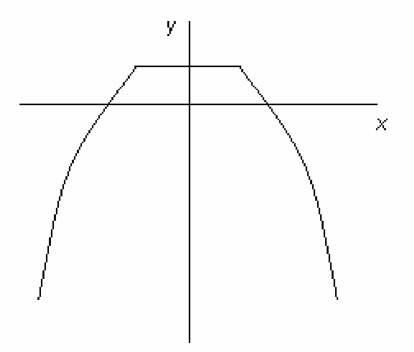
- Una función $f(x)$ se dice:

Función **cóncava** en un intervalo $I \subseteq D$, si dados dos puntos cualesquiera $x_1,\ x_2 \in I$ el segmento que une los puntos $(x_1,\ f(x_1))$ y $(x_2,\ f(x_2))$ nunca se sitúa por encima de la gráfica.

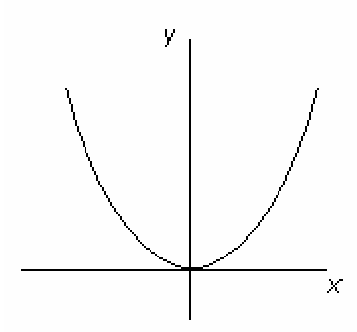
Función **estrictamente cóncava** en un intervalo $I \subseteq D$, si dados dos puntos cualesquiera $x_1,\ x_2 \in I$, el segmento que une los puntos $(x_1,\ f(x_1))$ y $(x_2,\ f(x_2))$ se sitúa por debajo de la gráfica.

Función **convexa** en un intervalo $I \subseteq D$, si dados dos puntos cualesquiera $x_1,\ x_2 \in I$ el segmento que une los puntos $(x_1,\ f(x_1))$ y $(x_2,\ f(x_2))$ nunca se sitúa por debajo de la gráfica.

Función **estrictamente convexa** en un intervalo $I \subseteq D$, si dados dos puntos cualesquiera $x_1,\ x_2 \in I$, el segmento que une los puntos $(x_1,\ f(x_1))$ y $(x_2,\ f(x_2))$ se sitúa por encima de la gráfica.



Función cóncava pero no estrictamente cóncava en R



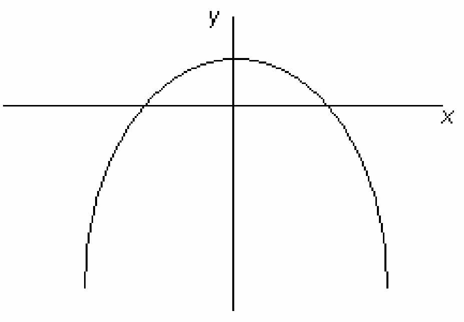
Función estrictamente convexa en R

- Una función $f(x)$ se dice:

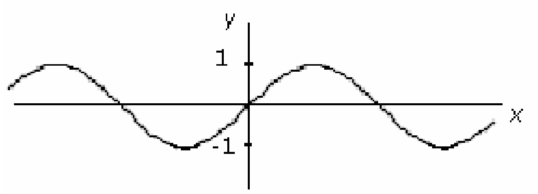
Función **acotada superiormente** si existe un número M cumpliendo que para cualquier valor x de D se verifica $f(x) \leq M$.

Función **acotada inferiormente** si existe un número m cumpliendo que para cualquier valor x de D se verifica $f(x) \geq m$.

Función **acotada** si está acotada inferior y superiormente. Es decir, si existe un número $K > 0$ tal que para cualquier valor x de D, $|f(x)| \leq K$, o equivalentemente, $-K \leq f(x) \leq K$.



Función acotada superiormente y no acotada inferiormente en R



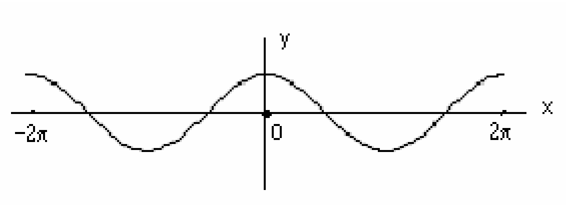
Función acotada superiormente por 1 y acotada inferiormente por -1

- Una función $f(x)$ se dice:

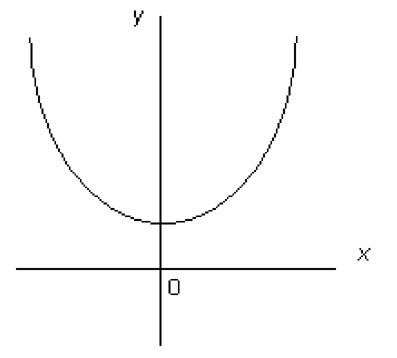
Función **par** si para cualquier valor x de D se cumple $f(-x) = f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto del eje OY.

Función **impar** si para cualquier valor x de D se cumple $f(-x) = -f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto del origen.

Función **periódica** si existe un número $M > 0$ cumpliendo que para cualquier valor x de D se verifica $f(x + M) = f(x)$.

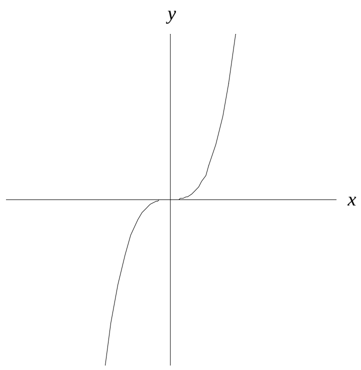


Función periódica de periodo 2π



Función par

Ejemplo 4: Observando la gráfica de la función $f(x) = x^3$ que se muestra a continuación, se tiene que $f(x)$ es estrictamente creciente en R, estrictamente cóncava en (-∞, 0), estrictamente convexa en (0, +∞), no está acotada superior ni inferiormente y es impar, ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.



Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real con dominios $D(f)$ y $D(g)$ respectivamente. Se definen las funciones:

- Suma de f y g como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ siendo $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$
- Producto de f por un escalar t como $(t.f)(x) = t\, f(x)$ siendo $D(t.f) = D(f)$
- Producto de f y g como $(f.g)(x) = f(x)\, g(x)$ siendo $D(f.g) = D(f) \cap D(g)$
- Cociente de f y g como $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ siendo $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap \{x \in D(g) \mid g(x) \neq 0\}$
- Composición de g y f como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ siendo $D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$
- Inversa de f: Esta función sólo se puede definir en el caso de que $y = f(x)$ sea inyectiva, se denota f^{-1} y se define como $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ siendo $D(f^{-1})$= Im f.
  Las gráficas de una función f y de su inversa f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Ejemplo 5: Dadas las funciones: $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 1$, $h(x) = \frac{1}{x}$ vamos a realizar las siguientes operaciones:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x - 1$

$(5.\,h)(x) = 5\; h(x) = \dfrac{5}{x}$

$(g\,.\,h)(x) = g(x)\; h(x) = \dfrac{3x-1}{x}$

$\left(\dfrac{f}{h}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{x^2}{1/x} = x^3$

$(f \text{ o } g)(x) = f(g(x)) = f(3x-1) = (3x-1)^2$, $(g \text{ o } f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 - 1$

b) La función $g(x) = 3x - 1$ es inyectiva, para calcular su función inversa hay que operar de la siguiente forma:

Intercambiando las variables en $y = 3x - 1$, queda $x = 3y - 1$ y despejando la y tenemos que $y = \dfrac{x+1}{3}$, luego $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.