6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{3-\sqrt{x^2+5}}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4-(x-3)^2 & \text{si } 0 \le x \le 7 \\ 7x-61 & \text{si } 7 < x \le 8 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{|x-2|}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Solución

a) Como la función está dada por un cociente, hay que determinar los puntos que anulan el denominador, es decir, los puntos que son solución de la ecuación $3-\sqrt{x^2+5}=0$.

Resolviendo la ecuación queda:

$3-\sqrt{x^2+5}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+5}=3 \quad \Rightarrow \quad x^2+5=9 \quad \Rightarrow \quad x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \;$ y $\; x = 2$

como en el proceso de resolución se ha elevado al cuadrado, es necesario comprobar si -2 y 2 verifican la ecuación inicial: $3-\sqrt{(-2)^2+5} = 3-\sqrt{9} = 3-3 = 0$, $3-\sqrt{2^2+5} = 3-\sqrt{9} = 3-3 = 0$

Por tanto, $x = -2$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación.

Luego, la función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

En los puntos $x = -2$ y $x = 2$ presenta discontinuidades no evitables ya que:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{3-\sqrt{x^2+5}} = \frac{3}{0^-} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{3-\sqrt{x^2+5}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x+1}{3-\sqrt{x^2+5}} = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x+1}{3-\sqrt{x^2+5}} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

b) La función $f(x) = \begin{cases} 4-(x-3)^2 & \text{si } 0 \le x \le 7 \\ 7x-61 & \text{si } 7 < x \le 8 \end{cases}$ verifica:

En el intervalo (0, 7) es el polinomio $4-(x-3)^2$, luego es continua y en el intervalo (7, 8) es el polinomio $7x-61$, y por ello continua.

El único punto que requiere un estudio es $x = 7$ ya que la definición de *f* cambia antes y después de él, por lo que se calculan los límites laterales quedando: $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^-} 4-(x-3)^2 = -12$, $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+} 7x-61 = -12$ y $f(7) = -12$. Por tanto, *f* es continua en $x = 7$.

c) Para estudiar la función $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{|x-2|}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$, conviene primero escribirla sin el valor absoluto quedando $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{-x+2}{x} & \text{si} \quad x<2 \ \text{ y } x\neq 0 \\ x+\dfrac{x-2}{x} & \text{si} \quad x\geq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

Los únicos puntos que requieren un estudio especial son $x = 0$ y $x = 2$ ya que en los demás casos la función es continua por las propiedades de continuidad ya vistas.

En $x = 0$ se cumple:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x+\frac{-x+2}{x}=0+\frac{2}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x+\frac{-x+2}{x}=0+\frac{2}{0^-}=-\infty$$

luego, la función es discontinua no evitable en este punto.

En $x = 2$ se cumple:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x+\frac{x-2}{x}=2+\frac{0}{2}=2 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x+\frac{-x+2}{x}=2+\frac{0}{2}=2 \quad , \quad f(2)=2$$

luego la función es continua en este punto.

d) La función $f(x)=\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$ es continua si $x\neq 0$ por ser producto y composición de funciones continuas.

En $x = 0$ se cumple $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x}=0$, por ser producto de una función que tiende a 0 y una función acotada, y $f(0) = 0$

Por tanto, f también es continua en $x = 0$.