Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

1. Calcular los dominios de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+3}$ **c)** $f(x) = \ln\dfrac{2-x}{x+1}$ **d)** $f(x) = \text{arctg}\ \dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$ **f)** $f(x) = e^{\frac{5+x}{1+x}}$ **g)** $f(x) = \text{sen}\,\dfrac{1}{x^2-9}$ **h)** $f(x) = \arccos\dfrac{4x+4}{2x+3}$

Solución

a) La función $f(x)$ es racional, por lo tanto, no está definida en aquellos puntos que anulan el denominador. Para determinarlos se resuelve la ecuación $x^2+x-6 = 0$ cuya solución es $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1\pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$, luego D = $\mathbb{R}$ - {-3, 2}.

b) Como $f(x) = \sqrt{x+3}$ está definida por una raíz cuadrada, sólo se puede calcular si el radicando es no negativo, es decir, si $x+3 \geq 0$. Despejando x se tiene $x \geq -3$ y por tanto, D = [-3, +∞).

c) La función $f(x) = \ln\dfrac{2-x}{x+1}$ es composición de una función logarítmica y una racional, por tanto, para calcular su dominio hay que tener en cuenta que las dos estén definidas.

El logaritmo neperiano sólo se puede hallar de expresiones positivas, luego, es necesario que $\dfrac{2-x}{x+1} > 0$. Para estudiar el signo $\dfrac{2-x}{x+1}$ utilizaremos la tabla siguiente:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 2)	(2, +∞)
$2-x$	+	+	-
$x+1$	-	+	+
$\dfrac{2-x}{x+1}$	-	+	-

Se cumple que $\dfrac{2-x}{x+1} > 0$ en (-1, 2). Además, por ser $\dfrac{2-x}{x+1}$ un cociente su denominador debe de ser no nulo y por ello, $x \neq -1$.

Por tanto, D = (-1, 2).

d) En la función $\text{arctg}\dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{e^x}$ aparecen las funciones arco tangente, raíz cúbica y exponencial además de un cociente, por lo que se tiene que considerar los puntos donde todas ellas estén definidas. Para ello hay que tener en cuenta lo siguiente:

La función e^x está definida para cualquier valor de x.

La función $\sqrt[3]{x-4}$ por estar dada por una raíz índice impar, está definida para cualquier valor de x.

El cociente $\frac{\sqrt[3]{x-4}}{e^x}$ tiene denominador no nulo ya que $e^x > 0$, y por lo tanto, está definido para cualquier valor de x.

La función arco tangente tiene por dominio $\mathbb{R}$, y por ello, está definida para cualquier valor de x.

Por tanto, $D = \mathbb{R}$.

e) Como $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$ está definida por una raíz cuadrada se tiene que cumplir que $x^2 + x - 2 \geq 0$. Se factoriza el polinomio quedando $(x-1)(x+2) \geq 0$, y se estudia su signo en la tabla que sigue:

Signo	(-∞, -2)	(-2, 1)	(1, +∞)
$x-1$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$(x-1)(x+2)$	+	-	+

Teniendo en cuenta que $x = -2$ y $x = 1$ verifican la desigualdad se tiene que $D = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

f) La función exponencial $f(x) = e^{\frac{5+x}{1+x}}$ está definida siempre que lo esté su exponente $\frac{5+x}{1+x}$, es decir, si $1 + x \neq 0$. Luego, $D = \mathbb{R} - \{-1\}$.

g) La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x^2-9}$ es composición de la función seno y una racional. Como el dominio de la función seno es $\mathbb{R}$, $f(x)$ está definida cuando exista la función racional $\frac{1}{x^2-9}$, es decir, si $x^2 - 9 \neq 0$, lo que es lo mismo $x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \neq 0$, de donde se tiene que $x \neq 3, -3$.

Por tanto, $D = \mathbb{R} - \{3, -3\}$.

h) La función $f(x) = \arccos\frac{4x+4}{2x+3}$ es composición de la función arco coseno y una racional. El dominio de la función arco coseno es [-1, 1], por lo que para poder definir $f(x)$ se debe verificar que $-1 \leq \frac{4x+4}{2x+3} \leq 1$, es decir, se tiene que cumplir el sistema de inecuaciones $\begin{cases} \frac{4x+4}{2x+3} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{4x+4}{2x+3} \end{cases}$

Operando para resolver la primera inecuación queda:

$$\frac{4x+4}{2x+3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x+4}{2x+3} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x+4-2x-3}{2x+3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{2x+3} \leq 0$$

En la tabla siguiente se estudia el signo de $\frac{2x+1}{2x+3}$:

Signo	$\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$	$\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$
$2x+1$	-	-	+
$2x+3$	-	+	+
$\frac{2x+1}{2x+3}$	+	-	+

Se tiene que la solución de la primera inecuación es $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right]$.

Operando de forma análoga con la segunda inecuación queda:

$$-1 \le \frac{4x+4}{2x+3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{4x+4}{2x+3}+1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{4x+4+2x+3}{2x+3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{6x+7}{2x+3}$$

En la tabla siguiente se estudia el signo de $\frac{6x+7}{2x+3}$:

Signo	$\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$	$\left(\frac{-3}{2}, \frac{-7}{6}\right)$	$\left(\frac{-7}{6}, +\infty\right)$
$6x+7$	-	-	+
$2x+3$	-	+	+
$\frac{6x+7}{2x+3}$	+	-	+

Se tiene que la solución de la segunda inecuación es $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right) \cup \left[\frac{-7}{6}, +\infty\right)$

Así, la solución del sistema de inecuaciones es la intersección de las soluciones anteriores y nos da el dominio de *f*, $D = \left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right] \cap \left(\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right) \cup \left[\frac{-7}{6}, +\infty\right)\right) = \left[\frac{-7}{6}, \frac{-1}{2}\right]$