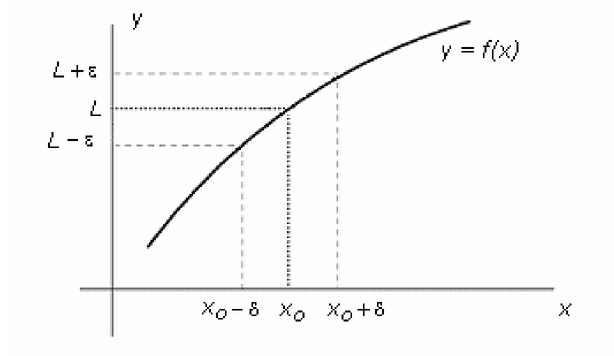
Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

De forma intuitiva se puede definir el límite de una función en un punto como el valor al que se aproxima la función cuando la variable independiente se acerca al punto. Esta idea intuitiva se formaliza en la siguiente definición:

Se dice que el **límite de *f* cuando *x* tiende a x_o** es el número real *L*, y se representa $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ que fijemos, se puede encontrar algún $\delta > 0$ verificando que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < |x - x_o| < \delta$ se verifica $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Notar que para que esta definición tenga sentido es necesario que existan puntos cercanos a x_o que sean del dominio de *f*, aunque no se necesita que *f* esté definida en x_o.

Propiedades de los límites

1. El límite de una función, si existe, es único.
2. $\lim\limits_{x \to x_o} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) + \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$, excepto si $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = -\infty$ o viceversa.
3. $\lim\limits_{x \to x_o} (t.\, f)(x) = t \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$, siendo *t* un número real cualquiera.
4. $\lim\limits_{x \to x_o} (f.\, g)(x) = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$, excepto si $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \pm\infty$ o viceversa.
5. $\lim\limits_{x \to x_o} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_o} g(x)}$ si $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) \neq 0$, excepto si:

   $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$ o $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \pm\infty$

6. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)^{g(x)} = (\lim\limits_{x \to x_o} f(x))^{\lim\limits_{x \to x_o} g(x)}$, excepto si: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$ o

   $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$ o $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \pm\infty$

7. Si $f(x)$ es una función acotada en un entorno de x_o y $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_o} (f.g)(x) = 0$

Ejemplo 11: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+e^x\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}e^x=0^2+e^0=0+1=1$

b) $\lim\limits_{x\to 1}5x\ln x=5\lim\limits_{x\to 1}x.\lim\limits_{x\to 1}\ln x=5.1.\ln 1=5.0=0$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+2}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^3+2}{\lim\limits_{x\to 3}x-1}=\dfrac{29}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}=\left(\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)\right)^{-\frac{2}{3}}=(-1)^{-\frac{2}{3}}=((-1)^2)^{-\frac{1}{3}}=1$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^3+3}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3+3)}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

f) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}=0$, ya que, $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ y la función seno es una función acotada.

En los casos en los que la aplicación directa de estas propiedades no permite calcular el límite (ver las excepciones que aparecen en las propiedades de los límites), se dice que hay una **indeterminación** y es necesario calcular el límite de otra manera.

Utilizando notación simbólica las indeterminaciones son:

$$+\infty-\infty,\ 0.(\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0^0,\ (\pm\infty)^0,\ 1^{\pm\infty}$$

Ejemplo 12: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}=\dfrac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve factorizando los polinomios con objeto de simplificar el factor $x-3$ común al numerador y al denominador, ya que $x=3$ anula a ambos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{1-\sqrt{x-1}}=\dfrac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, es decir, por $1+\sqrt{x-1}$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{1-(\sqrt{x-1})^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{1-x+1}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{-(x-2)}=\lim_{x\to 2}-(1+\sqrt{x-1})=-2$$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+5}{2x^4-3}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por x^4, ya que es la potencia de mayor exponente que aparece en el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4+5}{2x^4-3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{5}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{3}{x^4}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-3x}{x^2+1} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por x^3, ya que es la potencia de mayor exponente que aparece en el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-3x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \frac{2-0}{0^-} = -\infty$$

Notar que las indeterminaciones del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ ocasionadas por cocientes de polinomios se resuelven fácilmente generalizando lo realizado en los apartados c) y d) del ejemplo anterior obteniéndose:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_o} = \begin{cases} 0 & \text{si } m>n \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m=n \\ \pm\infty & \text{si } m<n \end{cases}$$

Ejemplo 13: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+5x+1}{x^4-1} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5}{2x^4-3} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es 0

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x-1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es $\dfrac{3}{5}$

Las indeterminaciones 0^0, $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$ se pueden transformar en una del tipo $0.(\pm\infty)$ tomando logaritmos neperianos. Además, la indeterminación $1^{\pm\infty}$ se puede resolver aplicando que si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\pm\infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)(f(x)-1)}$

Ejemplo 14: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+3}{9x-1}\right)^{2x^2} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{\infty} = 0$ ya que $\dfrac{8}{9}<1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2+3}{5x^2-1}\right)^{x} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{-\infty} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{+\infty} = +\infty$ ya que $\dfrac{5}{4}>1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x}{3^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{+\infty} = +\infty$ ya que $\dfrac{5}{3}>1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{4x^2+1} = 1^{+\infty}$ es una indeterminación que se puede resolver como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{4x^2+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2+1)\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2(4x^2+1)}{2x^2+5}} = e^{-4}$$

A veces, algunas de estas indeterminaciones se resuelven usando los llamados infinitésimos equivalentes que son funciones cuyo límite vale 0 y que se pueden sustituir una por otra si están multiplicando o dividiendo dentro de un límite sin que éste se modifique. Algunos infinitésimos equivalentes cuando $f(x) \to 0$ son:

$$\operatorname{sen} f(x) \approx f(x) \qquad \operatorname{arcsen} f(x) \approx f(x)$$
$$\operatorname{tg} f(x) \approx f(x) \qquad \operatorname{arctg} f(x) \approx f(x)$$
$$\ln(1+f(x)) \approx f(x) \qquad e^{f(x)} - 1 \approx f(x)$$
$$1 - \cos f(x) \approx \frac{(f(x))^2}{2}$$

Ejemplo 15: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \frac{0}{0}$. Esta indeterminación se puede resolver por infinitésimos equivalentes de la forma siguiente, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{0}{0}$. Esta indeterminación se puede resolver por infinitésimos equivalentes de la forma siguiente,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{4x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{4} = 0$$

Otra equivalencia útil para resolver límites es:

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o \quad \approx \quad a_n x^n \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty$$

Ejemplo 16: Calcular los siguientes límites utilizando la equivalencia anterior:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3x^5 + 2}{x^2 - 3x + 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve fácilmente utilizando la equivalencia anterior, quedando

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^5 + 2}{x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^5}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} -3x^3 = -3(-\infty) = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^3 + 2)}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se puede resolver de esta manera:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^3 + 2)}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \ln x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$