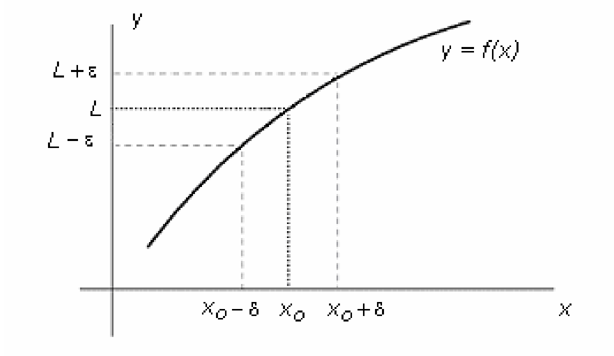
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

De forma intuitiva se puede definir el límite de una función en un punto como el valor al que se aproxima la función cuando la variable independiente se acerca al punto. Esta idea intuitiva se formaliza en la siguiente definición:

Se dice que el **límite de *f* cuando *x* tiende a x_o** es el número real *L*, y se representa $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ que fijemos, se puede encontrar algún $\delta > 0$ verificando que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < |x - x_o| < \delta$ se verifica $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Notar que para que esta definición tenga sentido es necesario que existan puntos cercanos a x_o que sean del dominio de *f*, aunque no se necesita que *f* esté definida en x_o.

Ejemplo 7: Aplicando la definición se va a comprobar que $\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$.

Tomando un valor cualquiera $\varepsilon > 0$ hay que encontrar un $\delta > 0$ tal que si se cumple $0 < |x - 2| < \delta$, se verifique $|(4x - 5) - 3| < \varepsilon$.

Realizando operaciones en la última desigualdad con objeto de encontrar una relación entre δ y ε queda:

$$|(4x - 5) - 3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |4x - 8| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 4|x - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

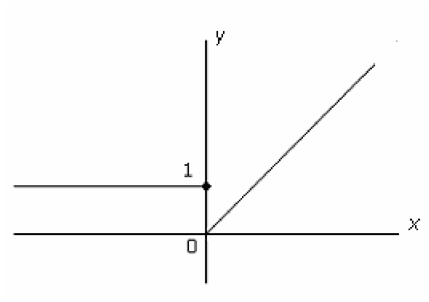
Como se ha de cumplir que $0 < |x - 2| < \delta$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ se verifica la definición de límite.

Al estudiar el valor al que tiende una función cuando *x* se aproxima a un punto x_o, a veces es conveniente considerar por separado los valores próximos a x_o que sean menores y los que sean mayores que él. Esto da lugar a los **límites laterales** que se definen a continuación.

- Se dice que L_1 es el **límite por la derecha de *f*** y se representa $\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L_1$, si la función se aproxima a este valor al acercarse *x* a x_o, siendo $x > x_o$. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < x - x_o < \delta$ se verifica $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.

- Se dice que L_2 es el **límite por la izquierda de *f*** y se representa $\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L_2$, si la función se aproxima a este valor al acercarse *x* a x_o, siendo $x < x_o$. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < x_o - x < \delta$ se verifica $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Ejemplo 8: La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cuya gráfica es



cumple que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ según se ve en el dibujo.

Cuando tiene sentido calcular los dos límites laterales se verifica la siguiente equivalencia:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

Una consecuencia inmediata de esta equivalencia es que si los límites laterales cuando $x \to x_o$ son distintos, el límite de la función cuando $x \to x_o$ no existe.

Ejemplo 9:

a) En la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ del ejemplo 8, como sus límites laterales cuando $x \to 0$ son distintos, se concluye que no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Dada $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, para calcular $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, como $f(x)$ está definida de forma diferente antes y después del punto $x = 3$, han de hallarse sus límites laterales quedando: $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 = 9$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 3x = 9$.

Como los dos límites laterales coinciden, entonces existe el límite de la función y se verifica que:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = 9$$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x-2} = 0$

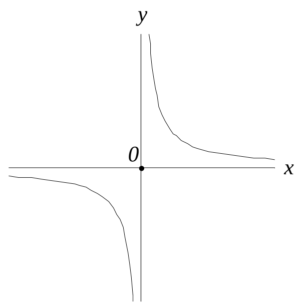
Observar que en este caso no tiene sentido considerar valores menores que 2 ya que D = [2, +∞), por tanto, no tiene sentido plantearse el límite por la izquierda cuando $x \to 2$ y el límite calculado coincide con el límite por la derecha.

La definición de límite se puede extender para elementos infinitos teniendo en cuenta lo siguiente:

- Por $x \to +\infty$, se entiende que se toman valores de x positivos tan grandes como se quiera.
- Por $x \to -\infty$, se entiende que se toman valores de x negativos tan pequeños como se quiera.
- Diremos que el límite es $+\infty$ si la función toma valores positivos tan grandes como se quiera.
- Diremos que el límite es $-\infty$ si la función toma valores negativos tan pequeños como se quiera.

Ejemplo 10:

a) Calcular los límites laterales cuando $x \to 0$ de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica se muestra a continuación.

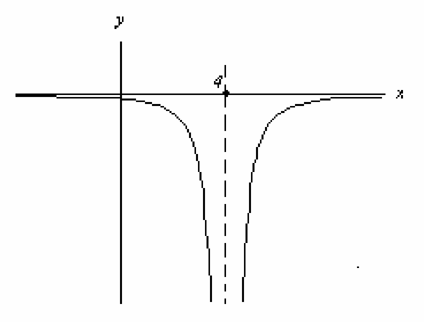


Si los valores de x se aproximan a 0 por la derecha el valor de la función crece indefinidamente, es decir, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Si se acerca por la izquierda a 0, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

En este caso el límite de la función cuando $x \to 0$ no existe, ya que los límites laterales no coinciden.

b) Calcular los límites laterales cuando $x \to 4$ la función $f(x) = \frac{-3}{(x-4)^2}$ cuya gráfica se muestra a continuación.



Si x se acerca a 4 por la derecha, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$.

Si x se acerca al 4 por la izquierda, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$.

En este caso, $\lim\limits_{x \to 4} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$, ya que ambos límites laterales coinciden y toman el valor -∞.

c) Calcular el límite cuando $x \to 1$ de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^3} & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Como $f(x)$ está definida de forma diferente antes y después del 1, para determinar el límite de la función han de hallarse sus límites laterales quedando: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty$.

Al ser distintos estos límites se concluye que no existe el límite de *f* cuando $x \to 1$.

Propiedades de los límites

1. El límite de una función, si existe, es único.
2. $\lim\limits_{x \to x_o} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) + \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$, excepto si $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = -\infty$ o viceversa.
3. $\lim\limits_{x \to x_o} (t.\, f)(x) = t \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$, siendo t un número real cualquiera.

4. $\lim\limits_{x\to x_o} (f.\, g)(x) = \lim\limits_{x\to x_o} f(x) \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$, excepto si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = \pm\infty$ o viceversa.

5. $\lim\limits_{x\to x_o} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) \neq 0$, excepto si:

   $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$ o $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = \pm\infty$

6. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)^{g(x)} = (\lim\limits_{x\to x_o} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}$, excepto si: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$ o

   $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$ o $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = \pm\infty$

7. Si $f(x)$ es una función acotada en un entorno de x_o y $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_o} (f.g)(x) = 0$

Ejemplo 11: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 + e^x\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 + \lim\limits_{x\to 0} e^x = 0^2 + e^0 = 0 + 1 = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 1} 5x\ln x = 5\lim\limits_{x\to 1} x . \lim\limits_{x\to 1}\ln x = 5.1.\ln 1 = 5.0 = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+2}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3} x^3+2}{\lim\limits_{x\to 3} x-1} = \dfrac{29}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} = \left(\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)\right)^{-\frac{2}{3}} = (-1)^{-\frac{2}{3}} = ((-1)^2)^{-\frac{1}{3}} = 1$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^3+3} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3+3)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x} = 0$, ya que, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y la función seno es una función acotada.

En los casos en los que la aplicación directa de estas propiedades no permite calcular el límite (ver las excepciones que aparecen en las propiedades de los límites), se dice que hay una **indeterminación** y es necesario calcular el límite de otra manera.

Utilizando notación simbólica las indeterminaciones son:

$$+\infty - \infty,\ 0.(\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0^0,\ (\pm\infty)^0,\ 1^{\pm\infty}$$

Ejemplo 12: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9} = \dfrac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve factorizando los polinomios con objeto de simplificar el factor $x - 3$

común al numerador y al denominador, ya que $x = 3$ anula a ambos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} = \dfrac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, es decir, por $1+\sqrt{x-1}$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{1-(\sqrt{x-1})^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{1-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{-(x-2)} = \lim_{x\to 2} -(1+\sqrt{x-1}) = -2$$