CONCEPTOS BÁSICOS

Se llama **función real de variable real** a cualquier aplicación $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$, es decir, a cualquier correspondencia que asocia a cada elemento de *D* un único número real.

Habitualmente, la notación que se usa para representar una función es $y = f(x)$, donde *x* es la variable independiente, *y* la variable dependiente y *f* la aplicación que indica como se obtiene el valor de *y* conocido el valor de *x*.

Se llama **dominio de definición de *f*** al conjunto de números reales *x* para los cuales existe *f*(*x*). Se denota *D*(*f*), o simplemente *D*. Es decir, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } f(x)\}$.

En algunos casos, el dominio de la función no viene dado a priori sino que hay que calcularlo mediante la definición de *f*. Además, en los modelos económicos para determinar el dominio no sólo hay que considerar la existencia matemática de *f*(*x*), sino también que tenga sentido en el contexto económico considerado tanto *x* como *f*(*x*).

Ejemplo 1:

a) $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt[4]{x-2}$ es una función real de variable real cuyo dominio es $D = [2, +\infty)$.

b) $y = \dfrac{1}{x-2}$ es una función con $D = \mathbb{R} - \{2\}$ ya que asocia a todo número real distinto de 2 un único elemento de $\mathbb{R}$.

c) La correspondencia dada por $y^2 = x$ no es una función, ya que a cada número real positivo *x* no nulo le asocia dos valores reales distintos, por ejemplo, para *x* = 4, el valor de la variable *y* puede ser 2 o -2.

d) El dominio de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ es $D = (0, +\infty)$ ya que para que exista $\sqrt{x}$, *x* debe de ser mayor o igual que 0, y además como está en el denominador no puede ser 0.

e) El coste *C* por día de una empresa es función de su producción diaria *q* según la relación $C = 500 + 15q$. Si la empresa tiene una capacidad límite de producir 5000 unidades al día, el dominio de esta función es $D = \{ q \mid 0 \le q \le 5000 \}$.

Observar que desde el punto de vista matemático, el dominio de esta función sería $\mathbb{R}$, sin embargo por el contexto económico el dominio se restringe al calculado.

FUNCIONES ELEMENTALES

La mayoría de las funciones con las que se trabaja se obtienen al operar con unas pocas funciones llamadas **funciones elementales**. A continuación se ven con detalle algunas de las más utilizadas.

Funciones Polinómicas

Una función polinómica de **grado *n*** es de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $n \in \mathbb{N}$ $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$.

Funciones Racionales

Son funciones de la forma $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas.

El dominio esta formado por todos los números reales que no son raíces del polinomio del denominador.

Funciones Irracionales

Son funciones de la forma $f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$ donde $R(x)$ es una función racional y n un número natural mayor que 1.
Si n es impar el dominio de esta función es igual al dominio de $R(x)$. Si n es par el dominio de esta función está formado por todos los números reales para los que $R(x) \geq 0$.

Ejemplo 6:

a) La función $f(x) = x^5+7x^3-4$ es polinómica de grado 5 y su dominio es R.

b) La función $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+1}$ es racional y su dominio es R, ya que, $x^2+1 \neq 0$ para cualquier valor x.

c) La función $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ es irracional y como el índice de la raíz es par (n = 2), para calcular su dominio hay que estudiar cuando $x^2-1 \geq 0$. Para resolver esta inecuación (Ver unidad 2), se factoriza el polinomio quedando $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ y se estudia su signo en la tabla siguiente

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
$x+1$	-	+	+
$x-1$	-	-	+
x^2-1	+	-	+

Por lo tanto, el dominio es (-∞, -1] ∪ [1, +∞), ya que se han de incluir 1 y -1 puesto que cumplen la desigualdad por ser ésta no estricta.

Funciones Exponenciales

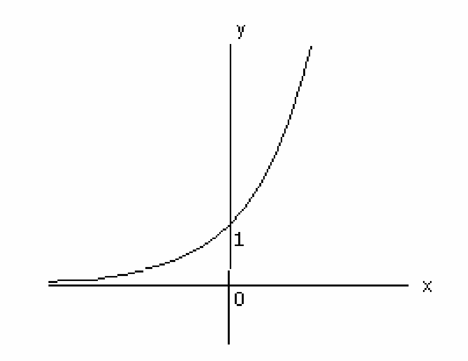
Son funciones de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$.

El dominio de estas funciones es R y su imagen (0, +∞).

A continuación se enumeran algunas propiedades de las potencias que resultan muy útiles a la hora de trabajar con las funciones exponenciales (Ver unidad 1):

$a^0 = 1$	$a^{x+y} = a^x a^y$	$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$
$(a\ b)^x = a^x\ b^x$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$

La función exponencial más utilizada es $f(x) = e^x$ cuya gráfica se muestra en la siguiente figura, de ella se deduce que es estrictamente creciente, estrictamente convexa y acotada inferiormente en R.



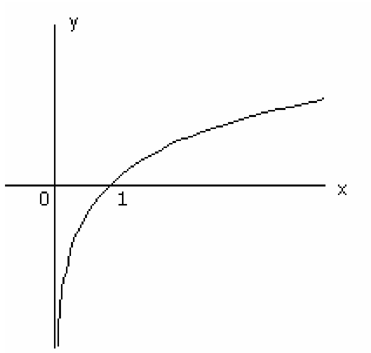
Funciones Logarítmicas

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

El dominio de estas funciones es $(0, +\infty)$ y su imagen $\mathbb{R}$.

La función $f(x) = \log_a x$ es la función inversa de la función exponencial a^x con $a > 0$.

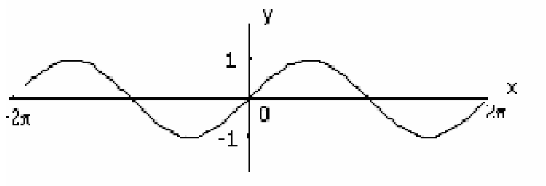
La función logarítmica más utilizada es la que viene dada por el logaritmo neperiano, es decir, la que tiene por base el número *e*, que es la función inversa de $f(x) = e^x$. Se representa por $f(x) = \ln x$ y su gráfica se muestra en la siguiente figura de la que se deduce que es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y no acotada superior ni inferiormente.



Algunas funciones Trigonométricas

La **función seno** viene dada por $f(x) = \text{sen} x$

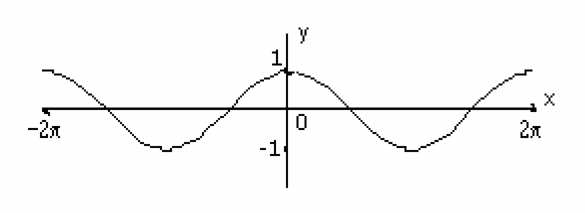
Su dominio es $\mathbb{R}$, su imagen [-1, 1] y su gráfica es la siguiente:



Como se observa en el dibujo anterior, está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1, es periódica de periodo 2π e impar.

La **función coseno** viene dada por $f(x) = \cos x$

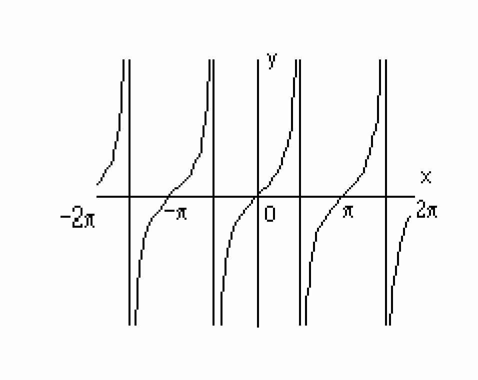
Su dominio es $\mathbb{R}$, su imagen [-1, 1] y su gráfica es la siguiente:



Como se observa en el dibujo anterior, está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1, es periódica de periodo 2π y par.

La **función tangente** viene dada por $f(x) = \text{tg}x$

Como $\text{tg}x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$, su dominio es $D = \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$, su imagen $\mathbb{R}$ y su gráfica es la siguiente:

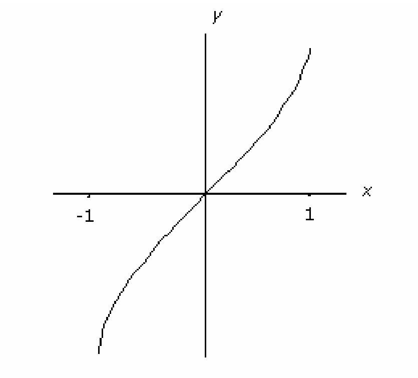


Como se observa en el dibujo anterior, no está acotada superior ni inferiormente , es periódica de periodo π e impar.

Las funciones inversas de las anteriores son:

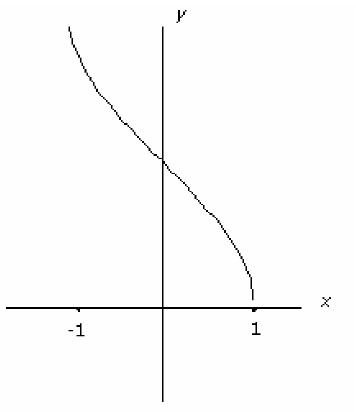
La **función arco seno** es la inversa de la función seno y se denota $f(x) = \text{arcsen}x$.

Su dominio es [-1, 1] y su gráfica



La **función arco coseno** es la inversa del coseno y se denota $f(x) = \arccos x$.

Su dominio es [-1, 1] y su gráfica



La **función arco tangente** es la inversa de la tangente y se denota $f(x) = \text{arctg}x$.

Su dominio es R y su gráfica