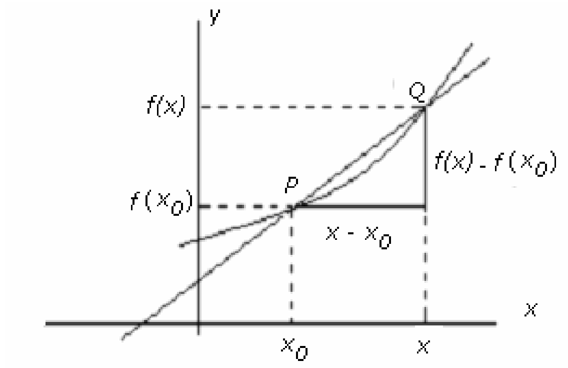
Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

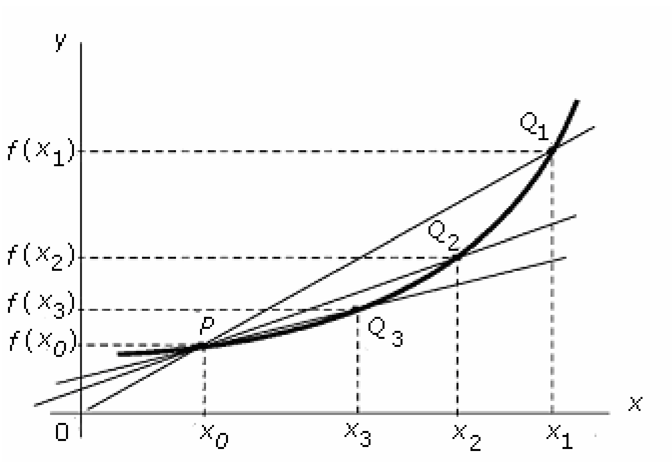
A continuación se obtiene la interpretación geométrica del concepto de derivada de una función en un punto, $f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

Si dibujamos la gráfica de $y = f(x)$ podemos observar en la siguiente figura que el cociente incremental $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ es la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$ a la curva $y = f(x)$, que pasa por los puntos $P = (x_o, f(x_o))$ y $Q = (x, f(x))$, es decir, $m_{\overline{PQ}} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.



Repitiendo este proceso con sucesivos puntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots$ cada vez más próximos al punto $P=(x_o, f(x_o))$ se deduce que:

- la recta tangente a la curva en el punto P es la recta límite de una series de rectas secantes a dicha curva que pasan por el punto P y otros puntos $Q_1, Q_2, Q_3\ldots$ que van aproximándose a P.
- la pendiente de la recta tangente será el límite, si existe, de las pendientes de las rectas secantes a la curva que pasan por los puntos $\overline{PQ_1}$, $\overline{PQ_2}$,..., cuando Q_i está cada vez más próximo a P.



Cuando $x \to x_o$, es decir, $Q_i \to P$, si existe $\lim_{Q_i \to P} m_{\overline{PQ_i}} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ nos da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en *P*.

Por tanto, teniendo en cuenta que $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, se concluye que la derivada de *f* en el punto x_o es la pendiente a la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en *P*.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto x_o, conocida su pendiente, se puede escribir de la forma:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

Ejemplo 5: Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ en el punto $x = 2$.

La pendiente es $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1 - 3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$

La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, es decir, $y - 3 = 4(x - 2)$, y operando queda $y = 4x - 5$.