Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

CONCEPTOS BÁSICOS

Dada una función real $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ en el que la función es continua, se sabe que cuando x toma valores infinitamente próximos a x_o, $f(x)$ se aproxima a $f(x_o)$, pero la continuidad no informa de cómo se realiza esta aproximación, por ejemplo, creciendo, decreciendo… El concepto de derivada que a continuación se define proporciona esta información.

Se llama **incremento de la variable independiente** x al valor $\Delta x = x - x_o$. Este valor da una medida de la proximidad entre x y x_o, de forma que $x \to x_o$ es equivalente a $\Delta x \to 0$.

Se llama **incremento de la variable dependiente** y al valor $\Delta y = \Delta f(x_o) = f(x) - f(x_o)$. Este valor da una medida de la proximidad entre $f(x)$ y $f(x_o)$.

Se llama **cociente incremental** al valor $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$. Este cociente da una medida de la proporción en que se encuentra los incrementos definidos anteriormente.

Si se considera puntos infinitamente próximos a x_o hay que calcular el límite del cociente incremental cuando $x \to x_o$, lo que nos lleva a la definición de derivada en el punto x_o.

Se llama **derivada de *f* en el punto x_o**, al número real, si existe, dado por:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Utilizando incrementos este límite se puede escribir de la forma $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$ teniendo en cuenta que $x = x_o + \Delta x$.

Este concepto se representa habitualmente por $\boldsymbol{f'(x_o)}$, $\boldsymbol{\dfrac{df(x_o)}{dx}}$ o $\boldsymbol{Df(x_o)}$.

Si existe $f'(x_o)$ se dice que f es **derivable en el punto x_o**.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x) = 2x^2 + x - 1$, se calcula $f'(-1)$ como sigue:

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 1 - 0}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = -3$$

Como la definición de derivada viene dada por un límite, se pueden definir los siguientes conceptos:

- Se llama **derivada lateral por la derecha de *f* en x_o** al número real, si existe, dado por $f'(x_o^+) = \lim\limits_{x \to x_o^+} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.
- Se llama **derivada lateral por la izquierda de *f* en x_o** al número real, si existe, dado por $f'(x_o^-) = \lim\limits_{x \to x_o^-} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

En el caso de que $f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$ se tiene que f es derivable en x_o y $f'(x_o) = f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$.

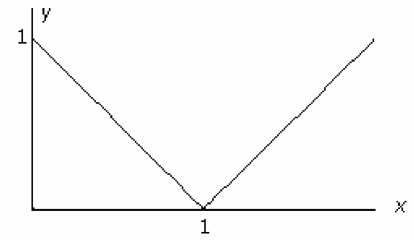
Ejemplo 2: Dada la función $f(x) = |x - 1| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ para estudiar su derivabilidad en x = 1, se calculan sus derivadas laterales ya que la definición de f es distinta a la derecha e izquierda de $x = 1$:

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

Como $f'(1^+) \neq f'(1^-)$, la función no es derivable en x = 1.

Al representar la función se observa que en x = 1 la gráfica presenta un pico debido a que sus derivadas laterales no coinciden.

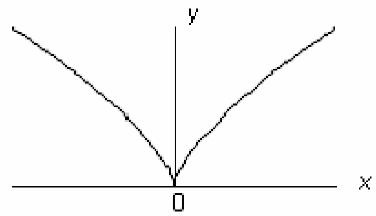


Ejemplo 3: Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, veamos si es derivable en x = 0 calculando sus derivadas laterales.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Al no existir las derivadas laterales la función no es derivable en x = 0. Como los límites anteriores son distintos la gráfica presenta en x = 0 un punto de pico.



Una condición necesaria para que la función *f* sea derivable en un punto x_o es que sea continua en x_o, es decir:

$$f \text{ derivable en } x_o \in D \quad \Rightarrow \quad f \text{ continua en } x_o$$

Notar que el reciproco no tiene porqué ser cierto, es decir, que hay funciones que son continuas en un punto y sin embargo, no son derivables en él. Normalmente esta propiedad se aplica de la siguiente forma, si una función no es continua en un punto, tampoco será derivable en dicho punto.

Ejemplo 4: Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad y derivabilidad en x = 1.

Para estudiar la continuidad hay que calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$. Como la definición de *f* cambia antes y después del punto x = 1, es necesario hallar los límites laterales, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2+1 = 2$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Al ser distintos los límites laterales se concluye que *f* no es continua en x = 1, por tanto, *f* no es derivable en x = 1.