

EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADAS DE UNA FUNCIÓN REAL

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones y escribir su función derivada:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 7x+2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3\sqrt{7x^2+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{c) } f(x) = x^2 - 2x|x-3|$$

Solución

a) La función $f(x)$ está definida a trozos por lo que hay que estudiarla teniendo en cuenta los siguientes casos:

- Si $x < 0$, $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$ es continua y derivable, por ser un cociente de polinomios con denominador no nulo, y su derivada es $f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^3}$.
- Si $0 < x < 1$, $f(x) = 7x+2$ es continua y derivable, por ser un polinomio, y $f'(x) = 7$.
- Si $x > 1$, $f(x) = 3\sqrt{7x^2+2}$ es continua, por ser una función irracional con radicando no negativo, y derivable cuya derivada es $f'(x) = \frac{3 \cdot 14x}{2\sqrt{7x^2+2}} = \frac{21x}{\sqrt{7x^2+2}}$.

- Si $x = 0$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (7x+2) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{(x-1)^2} = 2. \text{ Como ambos límites coinciden con } f(0)=2, f \text{ es continua en } 0.$$

Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7x+2-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7x}{x} = 7 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2}{(x-1)^2} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - 2(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x^2 + 4x}{(x-1)^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x+4}{(x-1)^2} = 4 \end{aligned}$$

Como no coinciden la función no es derivable en $x = 0$.

- Si $x = 1$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3\sqrt{7x^2+2} = 9 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (7x+2) = 9.$$

Como su valor coincide con $f(1)=9$, se deduce que f es continua en $x = 1$.

Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3\sqrt{7x^2 + 2} - 9}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(3\sqrt{7x^2 + 2} - 9)(3\sqrt{7x^2 + 2} + 9)}{(x - 1)(3\sqrt{7x^2 + 2} + 9)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9(7x^2 + 2) - 81}{(x - 1)(3\sqrt{7x^2 + 2} + 9)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{63x^2 - 63}{(x - 1)(3\sqrt{7x^2 + 2} + 9)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{63(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(3\sqrt{7x^2 + 2} + 9)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{63(x + 1)}{3\sqrt{7x^2 + 2} + 9} = \frac{63 \cdot 2}{18} = 7 \\ f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{7x + 2 - 9}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{7(x - 1)}{(x - 1)} = 7 \end{aligned}$$

Como las derivadas laterales coinciden, la función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 7$.

$$\text{La función derivada es } f'(x) = \begin{cases} \frac{-4}{(x-1)^3} & \text{si } x < 0 \\ 7 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{21x}{\sqrt{7x^2 + 2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Como $f(x) = \sqrt{x+3}$ está dada por una raíz cuadrada, es continua en su dominio $D = [-3, +\infty)$.

La derivada de f es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$, que existe en $(-3, +\infty)$.

c) Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, la función $f(x) = x^2 - 2x|x-3|$ se escribe de

$$\text{la forma } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x(x-3) & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 2x(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 - 6x & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 6x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Para estudiar la continuidad y derivabilidad de f se consideran los siguientes casos:

- Si $x < 3$, $f(x) = 3x^2 - 6x$ es continua y derivable por ser un polinomio, y $f'(x) = 6x - 6$.
- Si $x > 3$, $f(x) = -x^2 + 6x$ es continua y derivable por ser un polinomio, y $f'(x) = -2x + 6$.
- Si $x = 3$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2 + 6x) = 9$ y $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x^2 - 6x) = 9$. Como ambos límites coinciden con $f(3)=9$, f es continua en 3.

Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 6x - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} -(x-3) = 0$$

$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2 - 6x - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} 3(x+1) = 12$$

Como no coinciden la función no es derivable en $x = 3$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 6x - 6 & \text{si } x < 3 \\ -2x + 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

2. Hallar a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución

Para que f sea continua en $x = 1$ se tiene que cumplir $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ y efectuando los

cálculos se obtiene: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$ y $f(1) = \frac{1}{2}$

Igualando queda $a + b = \frac{1}{2}$, es decir, $b = \frac{1}{2} - a$.

Para que f sea derivable en $x = 1$ se tiene que cumplir $f'(1^+) = f'(1^-)$ y realizando los cálculos:

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - x^2 - 1}{2(x^2 + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x^2}{2(x^2 + 1)(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x+1)(x-1)}{2(x^2 + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x+1)}{2(x^2 + 1)} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + b - \frac{1}{2}}{x - 1} \stackrel{b = \frac{1}{2} - a}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + \frac{1}{2} - a - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x - 1)}{(x - 1)} = a$$

Igualando queda $a = -\frac{1}{2}$ y sustituyendo se tiene $b = \frac{1}{2} - a = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

3. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x^2}$

b) $f(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1}$

c) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 2}$

d) $f(x) = xe^{3x^2 + 1}$

e) $f(x) = \ln \frac{2x + 5}{2x - 5}$

f) $f(x) = \sqrt[8]{x^3 + \operatorname{sen} 2x}$

Solución

Para obtener las funciones derivadas usaremos la regla de la cadena y las reglas de derivación de las funciones elementales.

a) Para derivar de forma más sencilla, la función se escribe $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x^2} = 2x^3 + x^{-5} + x^{\frac{2}{5}}$ y

derivando queda $f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} + (-5)x^{-5-1} + \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = 6x^2 - 5x^{-6} + \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = 6x^2 - 5\frac{1}{x^6} + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

b) Para obtener la función derivada de $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ se aplica la regla de la derivada del cociente

quedando: $f'(x) = \frac{2(2x+1) - 2(2x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2} = \frac{4}{(2x+1)^2}$

c) Para derivar $f(x) = x\sqrt{x^2+2}$, la función se escribe $f(x) = x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$ y utilizando la regla de la derivada del producto queda:

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2} + x \frac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \sqrt{x^2+2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

d) Para calcular la función derivada de $f(x) = xe^{3x^2+1}$ hay que tener en cuenta la regla de la derivada del producto y la derivada de la función exponencial quedando:

$$f'(x) = e^{3x^2+1} + xe^{3x^2+1} 6x = e^{3x^2+1} + 6x^2e^{3x^2+1} = e^{3x^2+1}(1+6x^2)$$

e) La función $f(x) = \ln \frac{2x+5}{2x-5}$ es composición de un logaritmo y una función racional, por tanto su derivada se puede calcular aplicando la regla de la cadena y operando queda:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2x+5}{2x-5}} \frac{2(2x-5) - 2(2x+5)}{(2x-5)^2} = \frac{-20}{(2x+5)(2x-5)} = \frac{-20}{4x^2-25}$$

f) Para derivar esta función más fácilmente se escribe $f(x) = \sqrt[8]{x^3 + \operatorname{sen}2x} = (x^3 + \operatorname{sen}2x)^{\frac{1}{8}}$ y derivando queda:

$$f'(x) = \frac{1}{8}(x^3 + \operatorname{sen}2x)^{\frac{1}{8}-1} (3x^2 + 2\cos 2x) = \frac{1}{8}(x^3 + \operatorname{sen}2x)^{-\frac{7}{8}} (3x^2 + 2\cos 2x) = \frac{(3x^2 + 2\cos 2x)}{8(x^3 + \operatorname{sen}2x)^{\frac{7}{8}}}$$

$$= \frac{(3x^2 + 2\cos 2x)}{8 \sqrt[8]{(x^3 + \operatorname{sen}2x)^7}}$$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x = 7$ y en $x = -5$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x = -1$ y en $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^3 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$ y en $x = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Solución

a) En $x = 7$ la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ es continua y derivable. Calculando la función derivada de f queda $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$, y sustituyendo en $x = 7$, $f'(7) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$.

En $x = -5$ no tiene sentido hablar de derivada ya que en dicho punto no está definida la función.

b) La función derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ es $f'(x) = (-2)x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ y su valor en $x = -1$, $f'(-1) = \frac{-2}{(-1)^3} = 2$.

En $x = 0$, la función no es derivable ya que no es un punto del dominio de f .

c) Se puede comprobar que la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^3 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$ y como su

definición cambia antes y después de él, para calcular la derivada en este punto hay que hallar las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 + 2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x^2 + x + 1) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 1 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)(x+1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 3(x+1) = 6 \end{aligned}$$

Al coincidir las dos derivadas laterales, $f'(1^+) = f'(1^-) = 6$, se concluye que f es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 6$.

Para calcular la derivada en $x = 0 < 1$, se considera la definición de la función dada por $f(x) = 3x^2 + 1$ que tiene por función derivada $f'(x) = 6x$, luego $f'(0) = 0$.

d) Observar que en este caso la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ no es continua en $x = 1$ ya que

$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2$, luego se puede afirmar sin necesidad de cálculo que no es derivable.

5. Calcular la ecuación de la recta tangente, si existe, a las curvas dadas por las funciones siguientes en los puntos indicados :

a) $f(x) = x^3 + 7x + 2$ en $x = 0$

b) $f(x) = \ln x^2$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Solución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto dado por x_0 es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

a) Se calcula la derivada de la función $f(x) = x^3 + 7x + 2$ quedando $f'(x) = 3x^2 + 7$, cuyo valor en el punto $x = 0$ es $f'(0) = 7$. Teniendo en cuenta que $f(0) = 2$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 2)$ es $y - 2 = 7(x - 0)$, es decir, $y = 7x + 2$.

b) Se calcula la derivada de la función $f(x) = \ln x^2$ quedando $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$, cuyo valor en el punto $x = 1$ es $f'(1) = 2$. Teniendo en cuenta que $f(1) = \ln 1 = 0$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 0)$ es $y - 0 = 2(x - 1)$, es decir, $y = 2x - 2$.

c) Se puede comprobar que la función $f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$. Para

calcular la derivada en dicho punto se hallan las derivadas laterales ya que la definición de f cambia antes y después de él, quedando:

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x + 2 - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 4) = 5$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x + 1 - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5(x - 1)}{x - 1} = 5$$

Por tanto, la función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 5$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 6)$ es $y - 6 = 5(x - 1)$, es decir, $y = 5x + 1$.

6. Halla los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x^2 - 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{\ln(e^x + 1)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3\operatorname{sen}x + x \cos x}{x^5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{3x^3 - 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x^{1/\operatorname{sen}^2 x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6x - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{\ln(e^x + 1)} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x}{e^x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3\operatorname{sen}x + x \cos x}{x^5} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 3\cos x + \cos x - x \operatorname{sen}x}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos x - x \operatorname{sen}x}{5x^4} =$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x \cos x}{20x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{20x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x}{60x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{60x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{120x} = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x}{120} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x \operatorname{sen} x}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}
\end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{3x^3 - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{9x^3} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^{1/\operatorname{sen}^2 x} &= \left[1^{+\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} (\cos x - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x}} = e^{\left[\frac{0}{0} \right]} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x \cos x}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \left[+\infty - \infty \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} \right) = \left[\frac{0}{0} \right]$, en este caso si aplicamos directamente la regla de L'Hôpital el proceso no se acaba. Por ello vamos a sustituir la equivalencia "sen x ~ x si x → 0" cuando sen x aparezca como factor, es decir, en el denominador, quedando

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ y ahora se resuelve por la regla de L'Hôpital}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} \right) &= \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - 2 \operatorname{sen} x \cos x}{4x^3} \right) \underset{\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - \operatorname{sen} 2x}{4x^3} \right) = \\
&= \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2 \cos 2x}{12x^2} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \operatorname{sen} 2x}{24x} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8 \cos 2x}{24} \right) = \\
&= \frac{8}{24} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$