Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

5. Calcular la ecuación de la recta tangente, si existe, a las curvas dadas por las funciones siguientes en los puntos indicados :

a) $f(x) = x^3 + 7x + 2$ en $x = 0$

b) $f(x) = \ln x^2$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Solución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto dado por x_o es $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$.

a) Se calcula la derivada de la función $f(x) = x^3 + 7x + 2$ quedando $f'(x) = 3x^2 + 7$, cuyo valor en el punto $x = 0$ es $f'(0) = 7$. Teniendo en cuenta que $f(0) = 2$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (0, 2) es $y - 2 = 7(x - 0)$, es decir, y = 7*x* + 2.

b) Se calcula la derivada de la función $f(x) = \ln x^2$ quedando $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$, cuyo valor en el punto $x = 1$ es $f'(1) = 2$. Teniendo en cuenta que $f(1) = \ln 1 = 0$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (1, 0) es $y - 0 = 2(x - 1)$, es decir, y = 2*x* - 2.

c) Se puede comprobar que la función $f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$. Para calcular la derivada en dicho punto se hallan las derivadas laterales ya que la definición de *f* cambia antes y después de él, quedando:

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 3x + 2 - 6}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 4) = 5$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5x + 1 - 6}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5x - 5}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5(x - 1)}{x - 1} = 5$$

Por tanto, la función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 5$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (1, 6) es $y - 6 = 5(x - 1)$, es decir, y = 5*x* + 1.