4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\sqrt{x+2}$ en x = 7 y en x = -5

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ en x = -1 y en x = 0

c) $f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x<1\\ 2x^3+2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ en $x=1$ y en $x=0$

d) $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ en $x=1$

Solución

a) En x = 7 la función $f(x)=\sqrt{x+2}$ es continua y derivable. Calculando la función derivada de f queda $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$, y sustituyendo en x = 7, $f'(7)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$.

En x = -5 no tiene sentido hablar de derivada ya que en dicho punto no está definida la función.

b) La función derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$ es $f'(x)=(-2)x^{-3}=\dfrac{-2}{x^3}$ y su valor en x = -1, $f'(-1)=\dfrac{-2}{(-1)^3}=2$.

En x = 0, la función no es derivable ya que no es un punto del domino de f.

c) Se puede comprobar que la función $f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x<1\\ 2x^3+2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ es continua en x = 1 y como su definición cambia antes y después de él, para calcular la derivada en este punto hay que hallar las derivadas laterales:

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^3+2-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x^3-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}2(x^2+x+1)=6$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2+1-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}3(x+1)=6$$

Al coincidir las dos derivadas laterales, $f'(1^+)=f'(1^-)=6$, se concluye que f es derivable en $x=1$ y $f'(1)=6$.

Para calcular la derivada en $x=0<1$, se considera la definición de la función dada por $f(x)=3x^2+1$ que tiene por función derivada $f'(x)=6x$, luego $f'(0)=0$.

d) Observar que en este caso la función $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ no es continua en $x=1$ ya que $\lim\limits_{x\to 1^-}2x\neq\lim\limits_{x\to 1^+}x^2$, luego se puede afirmar sin necesidad de cálculo que no es derivable.