3. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x^2}$ **b)** $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ **c)** $f(x) = x\sqrt{x^2+2}$

d) $f(x) = xe^{3x^2+1}$ **e)** $f(x) = \ln\frac{2x+5}{2x-5}$ **f)** $f(x) = \sqrt[8]{x^3 + sen 2x}$

Solución

Para obtener las funciones derivadas usaremos la regla de la cadena y las reglas de derivación de las funciones elementales.

a) Para derivar de forma más sencilla, la función se escribe $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x^2} = 2x^3 + x^{-5} + x^{\frac{2}{5}}$ y

derivando queda $f'(x) = 2.3x^{3-1} + (-5)x^{-5-1} + \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = 6x^2 - 5x^{-6} + \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = 6x^2 - 5\frac{1}{x^6} + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

b) Para obtener la función derivada de $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ se aplica la regla de la derivada del cociente quedando: $f'(x) = \frac{2(2x+1) - 2(2x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2} = \frac{4}{(2x+1)^2}$

c) Para derivar $f(x) = x\sqrt{x^2+2}$, la función se escribe $f(x) = x\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}$ y utilizando la regla de la derivada del producto queda:

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2} + x\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}2x = \sqrt{x^2+2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

a) Para calcular la función derivada de $f(x) = xe^{3x^2+1}$ hay que tener en cuenta la regla de la derivada del producto y la derivada de la función exponencial quedando:

$$f'(x) = e^{3x^2+1} + xe^{3x^2+1}6x = e^{3x^2+1} + 6x^2e^{3x^2+1} = e^{3x^2+1}(1+6x^2)$$

b) La función $f(x) = \ln\frac{2x+5}{2x-5}$ es composición de un logarítmo y una función racional, por tanto su derivada se puede calcular aplicando la regla de la cadena y operando queda:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2x+5}{2x-5}}\frac{2(2x-5) - 2(2x+5)}{(2x-5)^2} = \frac{-20}{(2x+5)(2x-5)} = \frac{-20}{4x^2-25}$$

c) Para derivar esta función más fácilmente se escribe $f(x) = \sqrt[8]{x^3 + sen 2x} = \left(x^3 + \text{sen}2x\right)^{\frac{1}{8}}$ y derivando queda:

$$f'(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 + \operatorname{sen}2x\right)^{\frac{1}{8}-1}\left(3x^2 + 2\cos 2x\right) = \frac{1}{8}\left(x^3 + \operatorname{sen}2x\right)^{\frac{-7}{8}}\left(3x^2 + 2\cos 2x\right) = \frac{\left(3x^2 + 2\cos 2x\right)}{8\left(x^3 + \operatorname{sen}2x\right)^{\frac{7}{8}}} =$$

$$= \frac{\left(3x^2 + 2\cos 2x\right)}{8\sqrt[8]{\left(x^3 + \operatorname{sen}2x\right)^7}}$$