**2.** Hallar $a$ y $b$ para que la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 1$.

**Solución**

Para que $f$ sea continua en $x = 1$ se tiene que cumplir $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ y efectuando los cálculos se obtiene: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$ , $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax+b\right)=a+b$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$

Igualando queda $a+b=\dfrac{1}{2}$, es decir, $b=\dfrac{1}{2}-a$ .

Para que $f$ sea derivable en $x = 1$ se tiene que cumplir $f'(1^+)=f'(1^-)$ y realizando los cálculos:

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2-x^2-1}{2(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{2(x^2+1)(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x+1)(x-1)}{2(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x+1)}{2(x^2+1)}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-\dfrac{1}{2}}{x-1}\underset{b=\frac{1}{2}-a}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+\dfrac{1}{2}-a-\dfrac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a(x-1)}{(x-1)}=a$$

Igualando queda $a=-\dfrac{1}{2}$ y sustituyendo se tiene $b=\dfrac{1}{2}-a=\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$