1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones y escribir su función derivada:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 7x+2 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 3\sqrt{7x^2+2} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+3}$ **c)** $f(x) = x^2 - 2x|x-3|$

Solución

a) La función $f(x)$ está definida a trozos por lo que hay que estudiarla teniendo en cuenta los siguientes casos:

- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ es continua y derivable, por ser un cociente de polinomios con denominador no nulo, y su derivada es $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^3}$.
- Si $0 < x < 1$, $f(x) = 7x+2$ es continua y derivable, por ser un polinomio, y $f'(x) = 7$.
- Si $x > 1$, $f(x) = 3\sqrt{7x^2+2}$ es continua, por ser una función irracional con radicando no negativo, y derivable cuya derivada es $f'(x) = \dfrac{3.14x}{2\sqrt{7x^2+2}} = \dfrac{21x}{\sqrt{7x^2+2}}$.
- Si $x = 0$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (7x+2) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{(x-1)^2} = 2$. Como ambos límites coinciden con $f(0)=2$, f es continua en 0.

  Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

  $$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{7x+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{7x}{x} = 7$$

  $$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2}{(x-1)^2}-2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2-2(x^2-2x+1)}{(x-1)^2 x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x^2+4x}{(x-1)^2 x} =$$

  $$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x+4}{(x-1)^2} = 4$$

  Como no coinciden la función no es derivable en $x = 0$.

- Si $x = 1$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

  $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3\sqrt{7x^2+2} = 9 \text{ y } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (7x+2) = 9.$$

  Como su valor coincide con $f(1)=9$, se deduce que f es continua en $x = 1$.

  Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3\sqrt{7x^2+2}-9}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(3\sqrt{7x^2+2}-9\right)\left(3\sqrt{7x^2+2}+9\right)}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{9(7x^2+2)-81}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{63x^2-63}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{63(x-1)(x+1)}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{63(x+1)}{3\sqrt{7x^2+2}+9} = \frac{63.2}{18} = 7$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{7x+2-9}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{7(x-1)}{(x-1)} = 7$$

Como las derivadas laterales coinciden, la función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 7$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{(x-1)^3} & \text{si} \quad x < 0 \\ 7 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{21x}{\sqrt{7x^2+2}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) Como $f(x) = \sqrt{x+3}$ está dada por una raíz cuadrada, es continua en su dominio $D = [-3, +\infty)$.

La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$, que existe en $(-3, +\infty)$.

c) Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, la función $f(x) = x^2 - 2x\left|x-3\right|$ se escribe de la forma $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x\left(x-3\right) & \text{si} \quad x < 3 \\ x^2 - 2x\left(x-3\right) & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 - 6x & \text{si} \quad x < 3 \\ -x^2 + 6x & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$.

Para estudiar la continuidad y derivabilidad de f se consideran los siguientes casos:

- Si $x < 3$, $f(x) = 3x^2 - 6x$ es continua y derivable por ser un polinomio, y $f'(x) = 6x - 6$.
- Si $x > 3$, $f(x) = -x^2 + 6x$ es continua y derivable por ser un polinomio, y $f'(x) = -2x + 6$.
- Si $x = 3$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

  $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(-x^2+6x\right) = 9$ y $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \left(3x^2-6x\right) = 9$. Como ambos límites coinciden con $f(3)=9$, f es continua en 3.

  Para estudiar si es derivable hallamos las derivadas laterales:

$$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-x^2+6x-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} -(x-3) = 0$$

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3x^2-6x-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3} 3(x+1) = 12$$

Como no coinciden la función no es derivable en $x = 3$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 6x - 6 & \text{si} \quad x < 3 \\ -2x + 6 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$