CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Gráficamente el que una función $f(x)$ sea continua en un punto x_o, significa que no se rompe su gráfica en el punto (x_o, $f(x_o)$), es decir, se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel en las proximidades de dicho punto.

Intuitivamente la continuidad de $f(x)$ en x_o quiere decir que variaciones pequeñas de la variable x cuando está próxima a x_o, le corresponden variaciones pequeñas de $f(x)$.

A continuación se formaliza el concepto de función continua.

Una función real $f(x)$ es **continua** en x_o si se cumple $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Se dice que f es función continua en un subconjunto A si lo es en todos los puntos de A.

Ejemplo 17: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} 5x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.

Se calculan los límites laterales ya que la función tiene distinta definición por la derecha y por la izquierda del punto:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x+3 = 5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 5x^2 = 5 \text{, luego } \lim_{x \to 1} f(x) = 5 .$$

Además, como $f(1) = 5$ y coincide con $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, se cumple que f es continua en el punto $x = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.

Se calcula $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(2x^2 - 1\right) = 1$ y como $f(1) = 0$, se cumple que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \ne f(1)$ y por tanto, f no es continua en el punto $x = 1$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^4}$ en el punto $x = 3$

En este caso no existe $f(3)$, ya que 3 anula el denominador, por tanto, f no es continua en el punto $x = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+e^{-1/x}} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en el punto $x = 0$.

Como $e^{-1/x}$ tiene distinto límite según x tienda a 0 por la derecha o por la izquierda, para obtener $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{1+e^{-1/x}}$ se calculan los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{1+e^{-1/x}} = \dfrac{2}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{2}{1+0} = 2$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2}{1+e^{-1/x}} = \dfrac{2}{1+e^{+\infty}} = \dfrac{2}{1+\infty} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

Como estos límites no coinciden, entonces no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, y por ello, f no es continua en $x = 0$.

DERIVABILIDAD

Dada una función real $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ en el que la función es continua, se sabe que cuando x toma valores infinitamente próximos a x_o, $f(x)$ se aproxima a $f(x_o)$, pero la continuidad no informa de cómo se realiza esta aproximación, por ejemplo, creciendo, decreciendo… El concepto de derivada que a continuación se define proporciona esta información.

Se llama **derivada de *f* en el punto x_o**, al número real, si existe, dado por:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Este concepto se representa habitualmente por $\boldsymbol{f'(x_o)}$, $\boldsymbol{\dfrac{df(x_o)}{dx}}$ o $\boldsymbol{Df(x_o)}$.

Si existe $f'(x_o)$ se dice que *f* es **derivable en el punto x_o**.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x) = 2x^2 + x - 1$, se calcula $f'(-1)$ como sigue:

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 1 - 0}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = -3$$

Como la definición de derivada viene dada por un límite, se pueden definir los siguientes conceptos:

- Se llama **derivada lateral por la derecha de *f* en x_o** al número real, si existe, dado por $f'(x_o^+) = \lim\limits_{x \to x_o^+} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.
- Se llama **derivada lateral por la izquierda de *f* en x_o** al número real, si existe, dado por $f'(x_o^-) = \lim\limits_{x \to x_o^-} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

En el caso de que $f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$ se tiene que *f* es derivable en x_o y $f'(x_o) = f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$.

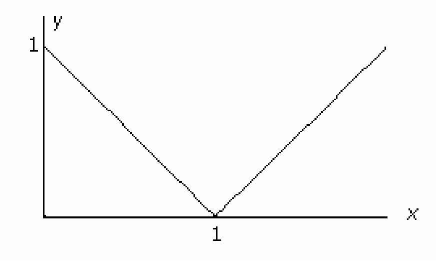
Ejemplo 2: Dada la función $f(x) = |x - 1| = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ para estudiar su derivabilidad en x = 1, se calculan sus derivadas laterales ya que la definición de *f* es distinta a la derecha e izquierda de *x* = 1:

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - x - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1$$

Como $f'(1^+) \neq f'(1^-)$, la función no es derivable en *x* = 1.

Al representar la función se observa que en *x* = 1 la gráfica presenta un pico debido a que sus derivadas laterales no coinciden.

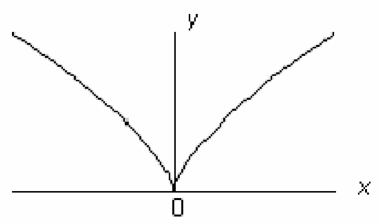


Ejemplo 3: Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, veamos si es derivable en x = 0 calculando sus derivadas laterales.

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Al no existir las derivadas laterales la función no es derivable en $x = 0$. Como los límites anteriores son distintos la gráfica presenta en $x = 0$ un punto de pico.



Una condición necesaria para que la función *f* sea derivable en un punto x_o es que sea continua en x_o, es decir:

$$f \text{ derivable en } x_o \in D \quad \Rightarrow \quad f \text{ continua en } x_o$$

Notar que el reciproco no tiene porqué ser cierto, es decir, que hay funciones que son continuas en un punto y sin embargo, no son derivables en él. Normalmente esta propiedad se aplica de la siguiente forma, si una función no es continua en un punto, tampoco será derivable en dicho punto.

Ejemplo 4: Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

Para estudiar la continuidad hay que calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Como la definición de *f* cambia antes y después del punto $x = 1$, es necesario hallar los límites laterales, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 2$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

Al ser distintos los límites laterales se concluye que *f* no es continua en $x = 1$, por tanto, *f* no es derivable en $x = 1$.