

## EJERCICIOS DE CARÁCTER ECONÓMICO DE DERIVADAS

1. Sea la función de demanda general de un bien A,  $q_a = \frac{y - 9p_a + 5p_b + 3p_c}{5p_a}$ , siendo  $y$  renta,  $p_a$  el precio del bien A,  $p_b$  y  $p_c$  los precios de otros bienes.
2. Sabiendo que inicialmente  $y = 186$ ,  $p_a = 9$ ,  $p_b = 6$  y  $p_c = 15$ .
- a) Determinar la cantidad de ese bien que inicialmente se demanda.
- b) Obtener la expresión de su demanda directa y calcular su elasticidad.
- c) Calcular la elasticidad-renta del bien A e interpretar el resultado.

### Solución

- a) Sustituyendo los valores iniciales en la función demanda queda

$$q_a = \frac{186 - 9 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 15}{5 \cdot 9} = \frac{186 - 81 + 30 + 45}{45} = 4$$

- b) Hay que encontrar la función que nos da el valor de la demanda de A en función de su precio,  $q_a = f(p_a)$ . Sustituyendo en  $q_a$  las condiciones iniciales de  $y$ ,  $p_b$  y  $p_c$ , se tiene:

$$q_a = \frac{186 - 9p_a + 30 + 45}{5p_a} = \frac{261 - 9p_a}{5p_a}$$

La elasticidad viene dada por la expresión  $e = -\frac{\frac{dq_a}{dp_a}}{\frac{q_a}{p_a}} = -\frac{p_a}{q_a} \frac{dq_a}{dp_a}$ .

Derivando la función  $q_a = \frac{261 - 9p_a}{5p_a}$  queda  $\frac{dq_a}{dp_a} = -\frac{261}{5p_a^2}$  y sustituyendo en la definición de  $e$  se

obtiene  $e = -\frac{p_a}{\frac{261 - 9p_a}{5p_a}} \cdot \frac{-261}{5p_a^2} = \frac{261}{261 - 9p_a}$

- c) Hay que encontrar la función que nos da el valor de la demanda de A en función de la renta  $y$ ,  $q_a = f(y)$ . Sustituyendo en  $q_a$  las condiciones iniciales de  $p_a$ ,  $p_b$  y  $p_c$ , se tiene:

$$q_a = \frac{y - 81 + 30 + 45}{45} = \frac{y - 6}{45}$$

La elasticidad-renta viene dada por la expresión  $E = -\frac{\frac{dq_a}{dy}}{\frac{q_a}{y}} = -\frac{y}{q_a} \frac{dq_a}{dy}$ .

Como la derivada de  $q_a = \frac{y-6}{45}$  es  $\frac{dq_a}{dy} = \frac{1}{45}$  se tiene que  $E = -\frac{y}{q_a} \frac{dq_a}{dy} = \frac{y}{\frac{y-6}{45}} \cdot \frac{1}{45} = \frac{y}{y-6}$ .

2. En una empresa el coste total de producir  $q$  unidades viene dado por la función:

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 12q^2 + 150q + 2304.$$

- a) Obtener la función de coste marginal y la de coste total medio.  
b) Determinar el coste marginal y el coste medio cuando la producción es de 3 y de 6 unidades.

### Solución

a) Derivando  $C(q)$  nos da la función de coste marginal  $CM_a(q) = C'(q) = q^2 - 24q + 150$ .

Dividiendo  $C(q)$  por  $q$  se obtiene la función de coste total medio:

$$CM_e(q) = \frac{1}{3}q^2 - 12q + 150 + \frac{2304}{q}$$

b) Sustituyendo en las funciones del apartado anterior  $q = 3$  se tiene:  $CM_a(3) = 87$  y  $CM_e(3) = 885$ , y sustituyendo por  $q = 6$  queda:  $CM_a(6) = 42$  y  $CM_e(6) = 474$ .

3. La función de ingresos de una empresa es,  $I(q) = -\frac{6}{10^6}q^3 + \frac{18}{10^3}q^2 - 2q + 100$ , con  $q > 100$ , y la función de coste total es  $C(q) = \frac{2}{10^2}q^2 - 24q + 11000$ , siendo  $q$  el número de unidades vendidas. Hallar el ingreso marginal y el coste marginal.

### Solución

El ingreso marginal  $IM_a(q)$  se obtiene derivando la función ingreso total quedando:

$$IM_a(q) = I'(q) = -\frac{18}{10^6}q^2 + \frac{36}{10^3}q - 2$$

El coste marginal  $CM_a(q)$  se obtiene derivando la función coste total quedando:

$$CM_a(q) = C'(q) = \frac{4}{10^2}q - 24 = \frac{1}{25}q - 24$$

4. Las funciones de oferta y demanda de un bien en un mercado competitivo son:

$$q^s(p) = \frac{10p - 20}{4} \quad \text{y} \quad q^d(p) = \frac{450 - p}{6}$$

- a) Obtener la expresión de la elasticidad de la demanda.  
b) Hallar el precio de equilibrio del mercado.

### Solución

a) Teniendo en cuenta que  $\frac{dq^d}{dp} = \frac{-1}{6}$ , la elasticidad de la demanda es:

$$e = -\frac{p}{q^d} \frac{dq^d}{dp} = -\frac{p}{450-p} \cdot \frac{-1}{6} = \frac{p}{450-p}$$

b) Para calcular el precio de equilibrio se igualan la oferta y la demanda,  $q^s(p) = q^d(p)$ , y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\frac{10p-20}{4} = \frac{450-p}{6} \Leftrightarrow 60p-120 = 1800-4p \Leftrightarrow 64p = 1920 \Leftrightarrow p = \frac{1920}{64} = 30$$

Por tanto, el precio de equilibrio del mercado es 30.