5. Determinar los valores reales de *a*, para que el siguiente sistema tenga: solución única, infinitas soluciones y ninguna. Resolverlo en los casos en que sea posible.

$$\left.\begin{aligned} x + ay + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Para estudiar los rangos de A y $(A|B)$, escalonamos la matriz ampliada

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & a & | & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & a & 3 & | & 2 \\ 2 & 3 & a & | & 3 \end{pmatrix} F_2 \to F_2 - F_1, \underset{\approx}{F_3} \to F_3 - 2F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} F_3 \to F_3 \underset{\approx}{+} (1-a)\, F_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & | & 2-a \end{pmatrix}$$

La primera operación elemental ($\underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2}$) tiene por objeto que el parámetro *a* figure en una fila inferior lo que facilita los cálculos.

El rango de A depende de si es nula o no la expresión $-a^2 - a + 6$

$$-a^2 - a + 6 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 + a - 6 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow a = 2 \;\text{ y }\; a = -3$$

<u>Casos:</u>

• $a \neq 2, -3 \;\Rightarrow\; -a^2 - a + 6 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ rgA = rg (A|B) = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución para cada valor de *a* distinto de 2 y de -3.

Vamos a hallar la solución resolviendo el sistema asociado a la matriz escalonada comenzando a despejar z en la última ecuación y sustituyendo en las anteriores:

$$(-a^2-a+6)\, z = 2-a \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2-a}{-a^2 - a + 6} = \frac{-(a-2)}{-(a-2)(a+3)} = \frac{1}{a+3}$$

$$y + (a+2)\, z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - (a+2)z = 1 - \frac{(a+2)}{(a+3)} = \frac{a+3-a-2}{a+3} = \frac{1}{a+3}$$

$$x + y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - y + z = 1 - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} = 1$$

La solución es $x = 1$, $y = \dfrac{1}{a+3}$, $z = \dfrac{1}{a+3}$

• $a = 2$, en este caso, $(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg$A$ = rg $(A|B) = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones que vamos a calcular resolviendo el sistema asociado a la matriz escalonada

$y + 4z = 1 \Rightarrow y = 1 - 4z$

$x + y - z = 1 \Rightarrow x = 1 - 1 + 4z + z = 5z$

Las soluciones son $x = 5z$, $y = 1 - 4z$, $z \in$ Ñ

• $a = -3$, en este caso, $(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg$A = 2 \neq$ rg $(A|B) = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.