

4. Hallar para qué valores de a el siguiente sistema es compatible determinado y calcular su

$$\text{solución para esos valores: } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 7 \\ -x + y + z = 3 \\ 2x + ay - 4z = a \end{array} \right\}$$

Solución

Estudiamos los rangos de A y de (A/B) , escalonando la matriz ampliada .

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & -4 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - F_1, \quad F_3 \rightarrow F_3 + F_1, \quad F_4 \rightarrow F_4 - 2 F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & a-2 & -2 & a-2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 + F_2, \quad F_4 \rightarrow 2 F_4 + (a-2) F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2(a-4) & 8(a-2) \end{array} \right)$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - (a-4) F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2a+24 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{rg}A = 3$ independientemente del valor de a y como el número de incógnitas es también 3 para que el sistema sea compatible determinado debe ocurrir que $\text{rg}(A/B)$ sea 3.

$$\text{rg}(A/B) = 3 \quad \text{si} \quad -2a + 24 = 0 \Rightarrow a = \frac{-24}{-2} = 12$$

Resolvamos el sistema para $a = 12$ por el método de Gauss.

$$(A/B) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \text{luego el sistema a resolver es} \\ x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = 6 \\ 2z = 10 \end{array} \right\} \text{despejando}$$

$$2z = 10 \Rightarrow z = 5$$

$$-2y + 2z = 6 \Rightarrow -2y = 6 - 2z = 6 - 2 \cdot 5 = -4 \Rightarrow y = 2$$

$$x + y - z = 1 \Rightarrow x = 1 - y + z = 1 - 2 + 5 = 4 \Rightarrow x = 4$$

Por tanto, la solución para $a = 12$ es $x = 4$, $y = 2$, $z = 5$.