2. Discutir y resolver el sistema homogéneo: $\left.\begin{aligned} x+y-z&=0\\ x-2y+z&=0\\ 2x-y&=0\end{aligned}\right\}$

Solución

Por ser un sistema homogéneo es compatible. Calculamos el rango de *A* para determinar el número de soluciones que posee.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Así, rg$A$ = 2, por tanto el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. El grado de indeterminación de sistema es 3 – rg$A$ = 3 - 2 = 1, por lo que la solución dependerá de un parámetro .

Para calcular la solución del sistema dado se resuelve el sistema equivalente asociado a la matriz escalonada que es $\left.\begin{aligned} x+y-z&=0\\ -3y+2z&=0\end{aligned}\right\}$

De la última ecuación se obtiene $3y = 2z$, luego, $y = \dfrac{2z}{3}$

Sustituyendo en la primera, $x + \dfrac{2z}{3} - z = x - \dfrac{z}{3} = 0$, luego $x = \dfrac{z}{3}$

Por lo tanto, las soluciones del sistema es $x = \dfrac{z}{3}$, $y = \dfrac{2z}{3}$, z un número real cualquiera.