1. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{array}\right\}$

a) Escribir la expresión matricial del sistema.

b) Discutir el sistema.

c) Resolver el sistema por el método de Gauss.

d) Estudiar si el sistema es de Cramer, y en caso afirmativo, calcular su solución matricialmente y por la regla de Cramer.

Solución

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) Escribimos la matriz ampliada del sistema dado y la escalonamos mediante operaciones elementales por filas. Observar que en este proceso también se escalona A.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg } A = 2 = \text{rg}(A|B) = \text{nº de incógnitas}$$

Aplicando el teorema de Rouche-Frobenius se deduce que el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

c) Teniendo en cuenta que $(A|B) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$, el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+3y = 3 \\ -y = 0 \end{array}\right\}$ es equivalente al inicial.

De la segunda ecuación se obtiene $y = 0$, y sustituyendo en la primera $2x + 3.0 = 3$, por tanto, $x = \frac{3}{2}$

Luego la solución del sistema es $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$

d) Como A es cuadrada y $|A| = 10-12 = -2 \neq 0$, el sistema dado es un sistema de Cramer y lo podemos resolver bien por cálculo matricial o bien por la regla de Cramer.

Cálculo matricial

$X = A^{-1}B$, es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Hallamos A^{-1} mediante operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 + 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to 1/2\, F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to -F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5/2).3+(3/2).6 \\ 2.3 + (-1).6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La solución del sistema es $x = \dfrac{3}{2}$, $y = 0$.

Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}\ , \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$