2. Expresar mediante intervalos los siguientes subconjuntos de R:

a) $A = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid |2x - 1| \leq 1 \right\}$ **b)** $B = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid |x^2 - 1| > 2 \right\}$ **c)** $C = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid |x + 1| > 2x + 5 \right\}$

Solución

a) El conjunto A está formado por las soluciones de la inecuación $|2x - 1| \leq 1$, que se resuelve a continuación teniendo en cuenta la propiedad "$|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k$":

$$|2x - 1| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 2x \leq 2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq 1$$

Por tanto, la expresión mediante intervalos del conjunto A es $A = [0, 1]$.

b) El conjunto B está formado por los valores de x que verifican la desigualdad $|x^2 - 1| > 2$. Utilizando la propiedad "$|a| \geq k \Leftrightarrow a \leq -k$ o $a \geq k$", se tiene:

$$|x^2 - 1| > 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 > 2 \;\text{ o }\; x^2 - 1 < -2$$

Por tanto, analizando cada una de estas dos posibilidades, queda:

- $x^2 - 1 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$ o $x < -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- $x^2 - 1 < -2 \Leftrightarrow x^2 < -1$, lo que no es posible para ningún valor real de x

En consecuencia, la expresión mediante intervalos del conjunto B es $B = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

c) El conjunto C está formado por los valores de x que verifican la desigualdad $|x + 1| > 2x + 5$. Estos valores se pueden calcular como en el apartado anterior o aplicando la definición de valor absoluto como sigue:

- Si $x + 1 \geq 0$, entonces $|x + 1| = x + 1$ y la inecuación queda $x + 1 > 2x + 5$, equivalentemente, $x < -4$, que es incompatible con el supuesto de partida $x + 1 \geq 0$. Por tanto, la inecuación no tiene solución.
- Si $x + 1 < 0$, entonces $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$ y la inecuación queda $-x - 1 > 2x + 5$, equivalentemente, $3x + 6 < 0$, es decir, $x < -2$. Como los valores que cumplen $x < -2$ verifican también el supuesto de partida, $x + 1 < 0$, la solución es $(-\infty, -2)$.

En consecuencia, el conjunto C es el intervalo $(-\infty, -2)$.