1. Expresar mediante intervalos los siguientes subconjuntos de R:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5-2x}{4+x} < 0 \right\}$ **b)** $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x-2} \geq 0 \right\}$ **c)** $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 - 4x < 0 \right\}$

d) $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{3x-9} \geq 0 \right\}$ **e)** $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x \leq 3x - 2 \right\}$

Solución

a) A continuación se calcula el conjunto de valores de x que verifican $\frac{5-2x}{4+x} < 0$:

$$\frac{5-2x}{4+x} < 0 \iff \begin{cases} 5-2x < 0 \text{ y } 4+x > 0 \iff x > \frac{5}{2} \text{ y } x > -4 \iff x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \\ \text{o} \\ 5-2x > 0 \text{ y } 4+x < 0 \iff x < \frac{5}{2} \text{ y } x < -4 \iff x \in (-\infty, -4) \end{cases}$$

En consecuencia, la expresión mediante intervalos del conjunto A es $A = (-\infty, -4) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) Para calcular el conjunto de valores de x que verifican $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$ se puede proceder como en el apartado a) o bien estudiar el signo del numerador y del denominador en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 2$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$\frac{x+2}{x-2}$	+	-	+

Teniendo en cuenta esta tabla, que -2 anula al numerador y 2 al denominador, la expresión mediante intervalos del conjunto B es $B = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$.

c) El conjunto C está formado por los valores de x para los que el polinomio $x^3 - 3x^2 - 4x$ es negativo. Para determinar dichos valores se factoriza el polinomio y se estudia el signo de cada factor en los intervalos determinados por los puntos que anulan el polinomio, como se muestra a continuación.

Las raíces del polinomio son:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 3x - 4) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x^2 - 3x - 4 = 0 \iff$$
$$\iff x = 0,\ x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-4)}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

por tanto, al ser las raíces $x = 0$, -1 y 4, el polinomio se puede factorizar como sigue:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x+1)(x-4)$$

En la siguiente tabla se determina el signo del polinomio según los valores de x:

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
x	-	-	+	+
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 4$	-	-	-	+
$x^3 - 3x^2 - 4x$	-	+	-	+

Así, el polinomio es negativo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 4)$, de donde, $C = (-\infty, -1) \cup (0, 4)$.

d) Para determinar los valores de x que verifican $\frac{x^2-4}{3x-9} \geq 0$ se factorizan los polinomios del numerador y del denominador quedando

$$\frac{x^2-4}{3x-9} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-3)}$$

y se estudia su signo en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-3)}$	-	+	-	+

Por tanto, la fracción polinómica es positiva en los intervalos $(-2, 2)$ y $(3, +\infty)$ y se anula en los valores de x que anulan el polinomio del numerador, es decir, en -2 y 2. Así, $D = [-2, 2] \cup (3, +\infty)$.

e) Los puntos del conjunto E han de verificar la inecuación $x^2 + 4x \leq 3x - 2$, que se puede escribir de la forma:

$$x^2 + 4x \leq 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 \leq 0$$

Para determinar los valores de x que verifican la anterior desigualdad, se factoriza $x^2 + x + 2$, para lo que se calculan sus raíces:

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Al no tener el polinomio raíces reales, el signo de éste es el mismo para cualquiera valor de x. Como, por ejemplo, para $x = 0$ el valor del polinomio es 2, se concluye que el polinomio es siempre positivo.

Por tanto, $E = \emptyset$.