Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

Algunas ecuaciones que no se pueden resolver en el conjunto de los números reales, tienen solución en el conjunto C. En general, se verifica que toda ecuación polinómica con coeficientes reales de grado n tiene n soluciones en el conjunto de los números complejos, pudiendo ser éstas números reales o imaginarios. Además, si tiene como solución un número imaginario, también es solución el conjugado de éste.

Ejemplo 3:

a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ es equivalente a $x^2 = -9$, por tanto, no tiene solución en $\mathbb{R}$. Sin embargo, sí la tiene en C ya que en este conjunto se pueden realizar las siguientes operaciones:

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\,\sqrt{-1} = \pm 3i$$

Por tanto, en el conjunto de los números complejos la ecuación tiene dos soluciones que son $x = -3i$ y $x = 3i$ y se observa que son números complejos conjugados entre sí.

b) La ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, ya que aplicando la fórmula de resolución de ecuaciones polinómicas de segundo grado se tiene $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.5}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ y se concluye que no existe solución real ya que el discriminante es negativo. Sin embargo, si la ecuación se resuelve en el conjunto de los números complejos tiene dos soluciones que son $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}\,\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 2+i \\ 2-i \end{cases}$

Por tanto, las soluciones en C son $x = 2+i$ y $x = 2-i$, que son dos números imaginarios conjugados entre sí.

c) La ecuación $x^3 - x^2 + 16x - 16 = 0$ tiene una solución real que es $x = 1$. Aplicando la Regla de Ruffini se obtiene:

$$x^3 - x^2 + 16x - 16 = (x-1)(x^2 + 16)$$

Como la ecuación $x^2 + 16 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, se concluye que $x = 1$ es la única solución real de la ecuación inicial.

Sin embargo, en C tiene otras dos soluciones, ya que en este conjunto se tiene:

$$x^2 + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -16 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\,\sqrt{-1} = \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial en C son $x = 1$, $x = 4i$ y $x = -4i$, siendo las dos últimas dos números complejos conjugados entre sí.