Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

SISTEMAS DE INECUACIONES

NOTA IMPORTANTE: El signo de desigualdad de las inecuaciones que aparecen en los sistemas que se estudian en este apartado, puede ser "≤", "≥", "<" o ">". Para las cuestiones teóricas que se desarrollan en esta unidad, únicamente se utilizará la desigualdad ">", siendo todas ellas *generalizables* a cualquiera de las otras tres.
En los ejemplos y ejercicios se utilizarán cualquiera de las cuatro desigualdades indistintamente.

CONCEPTOS

Un **sistema de *m* inecuaciones con *n* incógnitas** es un conjunto de *m* inecuaciones que podemos escribir de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \end{cases} \quad \text{siendo } f_1, f_2, \ldots, f_m \text{ funciones.}$$

En esta unidad, se trata fundamentalmente los sistemas de inecuaciones polinómicas, es decir, sistemas donde $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son polinomios. Si dichos polinomios son de grado 1, se dice que el sistema es lineal y en caso contrario, se dice que el sistema es no lineal.

Ejemplo 1: Son sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y \le 0 \\ 5x + 2y \ge 3 \\ y < 0 \end{cases} \text{(sistema lineal)}, \quad \begin{cases} x^2 + 3y + z \ge 2 \\ 3x + y^2 - z > 1 \end{cases} \text{(sistema no lineal)}, \quad \begin{cases} x^2 + 5y > e^z \\ y + z \le 4 \\ x^2 + y + z \ge 2 \end{cases} \text{(sistema no polinómico)}$$

Resolver un sistema de inecuaciones consiste en calcular el conjunto de puntos *S* (conjunto de soluciones) formado por todos los valores de las incógnitas que verifican al mismo tiempo todas las inecuaciones del sistema.

Si $S_1, \ldots, S_m$ son los respectivos conjuntos de soluciones de cada una de las inecuaciones, hallar la solución del sistema consiste en explicitar $S_1 \cap \ldots \cap S_m$.

Para no complicar excesivamente los cálculos se consideran sistemas donde *n* y *m* son valores pequeños.

SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Se resuelve cada inecuación del sistema por separado, obteniéndose como solución de cada una de ellas un subconjunto de la recta real. La solución del sistema es la intersección de todos estos subconjuntos. Podemos encontrarnos con las diferentes situaciones, algunas de las cuales analizamos con ejemplos.

Ejemplo 2: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x-4>0 \\ 3x+12>0 \end{cases}$.

Considerando la primera inecuación $2x-4>0$ y despejando x se tiene $x > 2$, luego las soluciones son los elementos del conjunto $S_1 = (2, \infty)$.

Procediendo de forma análoga con la segunda inecuación $3x + 12 > 0$, se obtiene, $x > -4$, luego las soluciones son los elementos del conjunto $S_2 = (-4, \infty)$.

Si representamos gráficamente S_1 y S_2 vemos claramente su intersección

Por tanto, la solución del sistema es $S = S_1 \cap S_2 = S_1 = (2, \infty)$ ya que en este caso S_1 está contenido en S_2.

Ejemplo 3: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x-4>0 \\ 3x+12\le 0 \end{cases}$.

Despejando x de las dos inecuaciones queda $\begin{cases} x>2 \\ x\le 4 \end{cases}$ luego, $S_1 = (2, \infty)$ y $S_2 = = (-\infty, -4]$

Si representamos gráficamente estas semirrectas se ve claramente que su intersección es vacía.

En conclusión, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y por ello el sistema no tiene solución.

Ejemplo 4: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} -x^2+x+2>0 \\ x^2+4\le (x+2)^2 \\ 3x+5<x+7 \end{cases}$.

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $-x^2+x+2>0$ se factoriza el polinomio $-x^2+x+2$, para lo que se calculan sus raíces, que son $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1\pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$. Así, la inecuación se puede escribir de la forma $(x+1)(2-x)>0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores en los intervalos determinados por las raíces obtenidas, lo que proporciona el signo del polinomio de 2º grado.

Signo	(-∞, -1)	(-1, 2)	(2, +∞)
$x + 1$	-	+	+
$2 - x$	+	+	-
$(x + 1)(2 - x)$	-	+	-

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S_1 = (-1, 2)$.

La inecuación $x^2+4\le(x+2)^2$ es equivalente a $x^2+4\le x^2+4x+4$, es decir, $0\le 4x$ cuya solución es $S_2 = [0, \infty)$.

La inecuación $3x + 5 < x + 7$ es equivalente a $2x - 2 < 0$, es decir, $x < 1$ cuya solución es $S_3 = (-\infty, 1)$.
Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (-1, 2) \cap [0, \infty) \cap (-\infty, 1) = [0, 1)$.

Ejemplo 4: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{3-x} > 0 \\ 2(4x-3) \le 9x-2 \end{cases}$.

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $\dfrac{x^2-4}{3-x} > 0$ se factoriza el numerador, que al ser diferencia de cuadrados permite escribir la inecuación de la forma $\dfrac{(x-2)(x+2)}{3-x} > 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores que aparecen en el cociente que define a la inecuación en los intervalos determinados por sus raíces; lo que proporciona el signo de dicho cociente.

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	-
$\dfrac{(x-2)(x+2)}{3-x}$	+	-	+	-

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S_1 = (-\infty, -2) \cup (2, 3)$.
La inecuación $2(4x-3) \le 9x - 2$ es equivalente a $0 \le x + 4$, es decir, $-4 \le x$ cuya solución es $S_2 = [-4, \infty)$.
Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es $S = S_1 \cap S_2 = [-4, -2) \cup (2, 3)$.

SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

En el caso de que las inecuaciones que componen el sistema tengan dos incógnitas, la solución es la región del plano obtenida como intersección de las regiones solución de cada una de las inecuaciones.

El estudio de todas las posibilidades puede ser muy complicado por ello en los siguientes ejemplos nos limitaremos a casos sencillos, en concreto consideraremos sistemas con dos inecuaciones definidas por polinomios de grado 1 o 2. De manera análoga se procede cuando los sistemas están definidos por otro tipo de inecuaciones (ver ejemplos resueltos).

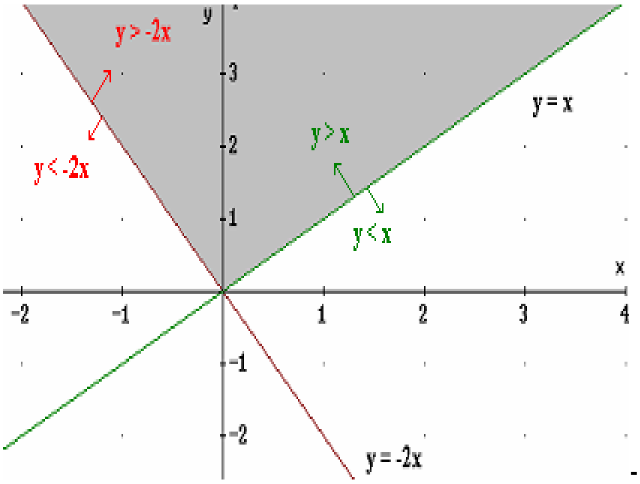
Ejemplo 6: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$

En primer lugar, se despeja y de las dos inecuaciones quedando $\begin{cases} y > -2x \\ y < x \end{cases}$

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación dibujamos $y = -2x$ que es la recta que une los puntos (0, 0) y (1, -2) y se considera la región donde se verifica $y > -2x$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 1$, $y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene 1 > -2).

Para representar gráficamente la solución de la segunda inecuación dibujamos $y = x$ que es la recta que une los puntos (0, 0) y (1, 1) y tomamos la región donde se verifica $y < x$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 2$, $y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 < 2$).

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones que se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



Ejemplo 7: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases}$.

Para resolverlo despejamos *y* de la primera inecuación y *x* de la segunda quedando $\begin{cases} x^2 < y \\ x > 2 \end{cases}$.

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación dibujamos $y = x^2$ que es la parábola de vértice (0, 0) que pasa por los puntos (-1, 1) y (1, 1) y se considera la región donde se verifica $x^2 < y$ para lo cual basta comprobar la desigualdad con un punto cualquiera que no esté en la parábola (por ejemplo $x = 0$, $y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 > 0$).

Para representar gráficamente la solución de la segunda inecuación dibujamos $x = 2$ que es la recta vertical que pasa por (2, 0) y se considera la región donde se verifica $x > 2$.

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones que se muestra sombreada en el siguiente dibujo: