SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

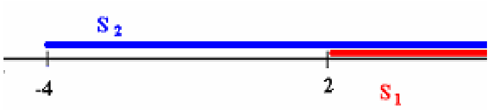
Se resuelve cada inecuación del sistema por separado, obteniéndose como solución de cada una de ellas un subconjunto de la recta real. La solución del sistema es la intersección de todos estos subconjuntos. Podemos encontrarnos con las diferentes situaciones, algunas de las cuales analizamos con ejemplos.

Ejemplo 2: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x-4>0 \\ 3x+12>0 \end{cases}$.

Considerando la primera inecuación $2x-4>0$ y despejando x se tiene $x > 2$, luego las soluciones son los elementos del conjunto $S_1 = (2,\ \infty)$.

Procediendo de forma análoga con la segunda inecuación $3x + 12 > 0$, se obtiene, $x > -4$, luego las soluciones son los elementos del conjunto $S_2 = (-4,\ \infty)$.

Si representamos gráficamente S_1 y S_2 vemos claramente su intersección



Por tanto, la solución del sistema es $S = S_1 \cap S_2 = S_1 = (2, \infty)$ ya que en este caso S_1 está contenido en S_2.

Ejemplo 3: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x-4>0 \\ 3x+12\le 0 \end{cases}$.

Despejando x de las dos inecuaciones queda $\begin{cases} x>2 \\ x\le 4 \end{cases}$ luego, $S_1 = (2,\ \infty)$ y $S_2 = = (-\infty, -4]$

Si representamos gráficamente estas semirrectas se ve claramente que su intersección es vacía.

En conclusión, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ y por ello el sistema no tiene solución.

Ejemplo 4: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} -x^2+x+2>0 \\ x^2+4\le (x+2)^2 \\ 3x+5<x+7 \end{cases}$.

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $-x^2+x+2>0$ se factoriza el polinomio $-x^2+x+2$, para lo que se calculan sus raíces, que son $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1\pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$. Así, la inecuación se puede escribir de la forma $(x+1)(2-x)>0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores en los intervalos determinados por las raíces obtenidas, lo que proporciona el signo del polinomio de 2º grado.

Signo	(-∞, -1)	(-1, 2)	(2, +∞)
$x + 1$	-	+	+
$2 - x$	+	+	-
$(x + 1)(2 - x)$	-	+	-

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es S_1 = (-1, 2).

La inecuación $x^2 + 4 \leq (x+2)^2$ es equivalente a $x^2 + 4 \leq x^2 + 4x + 4$, es decir, $0 \leq 4x$ cuya solución es S_2 = [0, ∞).

La inecuación $3x + 5 < x + 7$ es equivalente a $2x - 2 < 0$, es decir, $x < 1$ cuya solución es S_3 = (-∞, 1).

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ = (-1, 2) ∩ [0, ∞) ∩ (-∞, 1) = [0, 1).

Ejemplo 4: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{3-x} > 0 \\ 2(4x-3) \leq 9x-2 \end{cases}$.

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $\dfrac{x^2-4}{3-x} > 0$ se factoriza el numerador, que al ser diferencia de cuadrados permite escribir la inecuación de la forma $\dfrac{(x-2)(x+2)}{3-x} > 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores que aparecen en el cociente que define a la inecuación en los intervalos determinados por sus raíces; lo que proporciona el signo de dicho cociente.

Signo	(-∞, -2)	(-2, 2)	(2, 3)	(3, ∞)
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	-
$\dfrac{(x-2)(x+2)}{3-x}$	+	-	+	-

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es S_1 = (-∞, -2) ∪ (2, 3).

La inecuación $2(4x-3) \leq 9x-2$ es equivalente a $0 \leq x + 4$, es decir, $-4 \leq x$ cuya solución es S_2 = [-4, ∞).

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es $S = S_1 \cap S_2$ = [-4, -2) ∪ (2, 3).