EJERCICIOS DE CARÁCTER ECONÓMICO DE SISTEMAS DE INECUACIONES

1. En una granja se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se necesitan 10 unidades de leche y 6 unidades de mano de obra y para fabricar una unidad de mantequilla se utilizan 5 de leche y 8 de mano de obra. La empresa dispone cada día de 200 unidades de leche y 150 de mano de obra.

a) ¿Podrá producir diariamente 10 unidades de queso y 11 de mantequilla?, y ¿11 unidades de queso y 12 de mantequilla?

b) Representar en el plano las posibles producciones diarias de esta granja

Solución

Si llamamos x al número de unidades producidas de queso e y a las de mantequilla, se cumple:

- teniendo en cuenta la cantidad diaria máxima disponible de leche, $10x + 5y \le 200$
- teniendo en cuenta la mano de obra disponible cada día, $6x + 8y \le 150$
- además $x \ge 0$ e $y \ge 0$ por ser unidades producidas.

Por tanto, se tiene el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 10x + 5y \le 200 \\ 6x + 8y \le 150 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ asociado al proceso productivo.

a) Para producir 10 unidades de queso y 11 de mantequilla, se ha de verificar el sistema de inecuaciones anterior para estos valores, sustituyendo x por 10 e y por 11 queda $\begin{cases} 10.10 + 5.11 \le 200 \\ 6.10 + 8.11 \le 150 \\ 10 \ge 0 \\ 11 \ge 0 \end{cases}$, es decir, $\begin{cases} 155 \le 200 \\ 148 \le 150 \\ 10 \ge 0 \\ 11 \ge 0 \end{cases}$. Como se cumple, se puede afirmar que la granja podrá producir diariamente 10 unidades de queso y 11 de mantequilla.

Si sustituimos x por 11 e y por 12 en el sistema se tiene $\begin{cases} 10.11 + 5.12 \le 200 \\ 6.11 + 8.12 \le 150 \\ 11 \ge 0 \\ 12 \ge 0 \end{cases}$, es decir, $\begin{cases} 170 \le 200 \\ 162 \le 150 \\ 10 \ge 0 \\ 11 \ge 0 \end{cases}$

y en este caso, la segunda de las inecuaciones no se verifica, luego no es posible producir en esta granja 11 unidades de queso y 12 de mantequilla.

b) Para representar todas las posibles producciones diarias de la granja se tiene que resolver el sistema de inecuaciones planteado, para lo cual se calculan las soluciones de cada inecuación.

Despejando y de la primera queda $y \le \dfrac{200 - 10x}{5}$, es decir, $y \le 40 - 2x$.

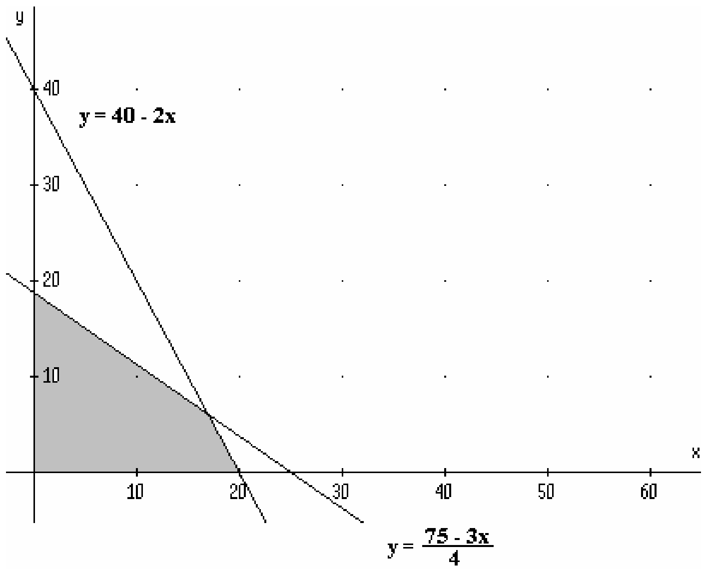
La recta $y = 40 - 2x$ pasa por los puntos (0, 40) y (20, 0). Para determinar la región donde se cumple $y \le 40 - 2x$ basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo x = 0, y = 0 es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene 0 ≤ 40). Por tanto, la solución está formada por los puntos del semiplano en el que está el (0, 0), es decir, por los puntos situados por debajo de la recta o en ella. (Ver figura)

Despejando y de la segunda inecuación queda $y \leq \dfrac{150-6x}{8}$, es decir, $y \leq \dfrac{75-3x}{4}$.

La recta $y = \dfrac{75-3x}{4}$ pasa por los puntos (1, 18) y (25, 0). Para determinar la región donde se cumple $y \leq \dfrac{75-3x}{4}$ basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 0$, $y = 0$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $0 \leq \dfrac{75}{4}$). Por tanto, la solución está formada por los puntos del semiplano en el que está el (0, 0), es decir, por los puntos situados por debajo de la recta o en ella. (Ver figura)

Las soluciones de las inecuaciones $x \geq 0$ y $y \geq 0$ son los puntos situados en el primer cuadrante incluidos los ejes que lo delimitan. (Ver figura)

Las posibles producciones diarias de la granja están dadas por los puntos situados en la intersección de las regiones solución de cada una de las inecuaciones y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



2. Se desea construir un corral rectangular con un lado 2 metros más largo que el otro y que tenga una superficie mínima de $15\,m^2$. Calcular la longitud que puede tener el lado menor si se dispone de hasta 20m. lineales de cerca para vallarlo.

Solución

Si llamamos x a la longitud del lado menor del corral, se tiene que el lado mayor mide $x + 2$, el área del corral es $x(x+2)$ y el perímetro $2x + 2(x+2)$.

Teniendo en cuenta las limitaciones del problema se tiene que verificar el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} x(x+2) \geq 15 \\ 2x + 2(x+2) \leq 20 \\ x > 0 \end{cases}$.

Para resolver la primera inecuación se pasan todos sus términos al primer miembro y se opera quedando $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

Se factoriza el polinomio para lo que se calculan sus raices, $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$; así la inecuación se puede escribir de la forma $(x-3)(x+5) \geq 0$.

En la tabla siguiente se estudia el signo del polinomio en los intervalos determinados por sus raíces:

Signo	(-∞, -5)	(-5, 3)	(3, +∞)
x - 3	-	-	+
x + 5	-	+	+
$(x-1)(x-4)$	+	-	+

Teniendo en cuenta la tabla anterior y que la desigualdad es no estricta, la solución de esta inecuación es (-∞, -5] ∪ [3, +∞).

Realizando operaciones en la segunda inecuación queda $4x + 4 \leq 20$, es decir, $x \leq 4$. Por tanto, su solución es (-∞, 4].

En consecuencia, la solución del sistema es S = ((-∞, -5] ∪ [3, +∞)) ∩ (-∞, 4] ∩ (0, +∞) = [3, 4].

La longitud del lado menor del corral podrá ser cualquier valor del intervalo [3, 4].