ECUACIONES POLINÓMICAS CON UNA INCÓGNITA

Las **ecuaciones polinómicas** son aquellas equivalentes a una ecuación cuyo primer término es un polinomio y el segundo es cero. Así, una **ecuación polinómica de grado *n*** se puede escribir de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde a_n, a_{n-1}, ... y a_0 son los coeficientes de la ecuación y $a_n \neq 0$

Ejemplo 6:

a) $4x - 5 = 0$ es una ecuación polinómica de grado 1

b) $3x^2 - 5x + 8 = 0$ es una ecuación polinómica de grado 2

c) $1 - x^6 = 7 + 2x$ es una ecuación polinómica de grado 6

d) $\frac{x - 1}{8} = \frac{x^2 - 1}{4}$ es una ecuación polinómica de grado 2

e) Las siguientes ecuaciones no son polinómicas: $4x - 5\sqrt{x} = 0$, $1 + e^x = 7$, $\frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{4}$

Ecuaciones polinómicas de primer grado

Una ecuación polinómica de primer grado o lineal es equivalente a una de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$.

Para resolverla se pasan todos los términos con x a un miembro y los que no tienen x al otro, por último se despeja la incógnita y se obtiene una única solución:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Ejemplo 7: Para resolver la ecuación $7x - 18 = 3x$, se realizan los siguientes pasos:

1º) se pasa 18 sumando al segundo miembro	$7x = 3x + 18$
2º) se pasa $3x$ restando al primer miembro	$4x = 18$
3º) se pasa 4 dividiendo al segundo miembro	$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

Por tanto, la ecuación $7x - 18 = 3x$ tiene una única solución que es $x = \frac{9}{2}$

Ecuaciones polinómicas de segundo grado

Una ecuación polinómica de segundo grado o cuadrática es equivalente a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

Se puede demostrar que las soluciones de una ecuación de segundo grado vienen dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ que aparece dentro de la raíz cuadrada de la fórmula anterior se le llama **discriminante** de la ecuación. Teniendo en cuenta que para resolver la ecuación es necesario calcular la raíz cuadrada del discriminante se tienen los siguientes casos:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene una única solución que es doble o de multiplicidad 2 (se puede considerar que la ecuación tiene dos soluciones iguales).
- Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene solución.

Observar que en esta unidad se considera que se resuelven las ecuaciones en el conjunto de los números reales. Si se hiciera la resolución en el conjunto de los números complejos, la conclusión del apartado c) sería que la ecuación no tiene raíces reales pero sí complejas. (Ver la Unidad Didáctica de Números Complejos)

Ejemplo 8: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4.4.9}}{2.4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Por tanto, la única solución es $x = \frac{3}{2}$ que es doble o de multiplicidad 2.

c) $x^2 - 2x + 9 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.9}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-32}}{4}$ y se concluye que no existe solución ya que el discriminante es negativo.

En la resolución de determinadas ecuaciones polinómicas de grado 2 no merece la pena aplicar la fórmula anterior. En concreto, cuando el coeficiente b o c es cero la resolución es inmediata teniendo en cuenta que:

- Si $b = 0$, se tiene la ecuación $ax^2 + c = 0$ que se resuelve despejando x^2 y tomando raíces cuadradas si es posible

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, \text{ si } \frac{-c}{a} \geq 0$$

- Si $c = 0$, se tiene la ecuación $ax^2 + bx = 0$ y se resuelve sacando factor común la incógnita x y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x\,(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Ejemplo 9: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $5x^2 - 20 = 0$. Despejando x^2 se tiene $x^2 = 4$ y tomado raíces cuadradas $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -2$ y $x = 2$.

b) $3x^2 + 7 = 0$. Despejando x^2 se tiene $x^2 = \frac{-7}{3}$ y como el cuadrado de un número no puede ser negativo se deduce que la ecuación no tiene soluciones.

c) $-3x^2 + 4x = 0$. Sacando factor común la x se tiene $x(-3x + 4) = 0$. Teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $-3x + 4 = 0$, es decir $x = \frac{4}{3}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$.

Es útil tener en cuenta que si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene como soluciones r_1 y r_2 se puede escribir de las siguientes formas:

- $a\,(x - r_1)\,(x - r_2) = 0$
- $x^2 - sx + p = 0$, siendo s la suma de las soluciones, $s = r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$, y p el producto de las mismas, $p = r_1\,r_2 = \frac{c}{a}$

Ejemplo 10:

a) Las soluciones de la ecuación $-3x^2 + x + 2 = 0$ son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-3).2}}{2(-3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-6} = \frac{-1 \pm 5}{-6} = \begin{cases} \frac{-2}{3} \\ 1 \end{cases}$

Por tanto, la ecuación se puede escribir, $-3\left(x - \frac{-2}{3}\right)(x - 1) = 0$, es decir, $-3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1) = 0$.

b) La ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$ se puede resolver teniendo en cuenta que si r_1 y r_2 son las soluciones de la ecuación se ha de verificar que $r_1 + r_2 = -2$ y $r_1\,r_2 = -15$. Por tanto, es inmediato que las soluciones de la ecuación son $r_1 = -5$ y $r_2 = 3$.

c) La ecuación de segundo grado que verifica que la suma de sus soluciones es 5 y el producto 7 es $x^2 - 5x + 7 = 0$

Ecuaciones polinómicas de cualquier grado

Una ecuación polinómica de grado n es equivalente a una de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ con } a_n \neq 0$$

Si en una ecuación polinómica el polinomio está factorizado (está expresado como producto de polinomios de grado 1 o de mayor grado pero sin raíces reales), es inmediato el cálculo de sus soluciones teniendo en cuenta que un producto de factores es igual a cero si y sólo si alguno de los factores es nulo. De esta forma, las soluciones de la ecuación se obtendrán resolviendo cada una de las ecuaciones polinómicas obtenidas al igualar cada uno de los factores a cero.

Ejemplo 11: La ecuación $(2x^2 + 5)(x - 3)(1 + x) = 0$ tiene por soluciones $x = 3$ y $x = -1$.

En efecto, al estar factorizado el polinomio, las soluciones de la ecuación se calculan resolviendo las siguientes ecuaciones:

$2x^2 + 5 = 0$ que no tiene soluciones

$x - 3 = 0$ cuya solución es $x = 3$

$1 + x = 0$ cuya solución es $x = -1$

Los siguientes resultados permiten, en algunos casos, factorizar un polinomio:

- Si no hay término independiente, es decir $a_0 = 0$, se saca factor común la mayor potencia posible de x
- La diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia

- Si un polinomio de coeficientes enteros es divisible por $x - x_0$, con x_0 un número entero, entonces x_0 es divisor del término independiente a_0
- Un polinomio es divisible por $x - x_0 \Leftrightarrow x_0$ es solución de la ecuación polinómica resultante de igualar ese polinomio a cero

Ejemplo 12 : Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(2x - 3)(1 - x)(x + 6) = 0$

Como el polinomio está factorizado las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \qquad 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \qquad x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{3}{2}$, $x = 1$ y $x = -6$.

b) $2x^3 + 5x^2 = 0$

Para resolver esta ecuación, al ser el término independiente 0, se saca factor común x^2, quedando $x^2(2x + 5) = 0$. Al estar el polinomio factorizado las soluciones son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ doble} \qquad 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$$

Por tanto, las soluciones son $x = 0$ doble y $x = \frac{-5}{2}$.

c) $x^4 - 25 = 0$

Teniendo en cuenta que el polinomio $x^4 - 25$ es diferencia de cuadrados (los cuadrados de x^2 y de 5), la ecuación se puede escribir de la forma $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 0$.

Las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores. Como la ecuación $x^2 + 5 = 0$ no tiene solución, las únicas soluciones de la ecuación inicial son las de $x^2 - 5 = 0$, es decir, $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$.

d) $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$

Para factorizar el polinomio $4x^3 + 8x^2 - x - 2$ se tiene en cuenta que los divisores enteros del término independiente, -2, son 1, -1, 2 y -2. Sustituyendo $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = -2$ en la ecuación se observa que únicamente $x = -2$ es solución. Dividiendo $4x^3 + 8x^2 - x - 2$ entre $x - (-2) = x + 2$, mediante la Regla de Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 8 & -1 & -2 \\ -2 & & -8 & 0 & 2 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, el polinomio se puede escribir de la forma $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = (x + 2)(4x^2 - 1)$ y la ecuación inicial se puede expresar como $(x + 2)(4x^2 - 1) = 0$. Así, las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \qquad 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Por tanto, las soluciones son $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{-1}{2}$.

e) $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = 0$

Aplicando la Regla de Ruffini para factorizar el polinomio $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3$, se obtiene:

	1	-1	-4	-4	-5	-3
-1		-1	2	2	2	3
	1	-2	-2	-2	-3	0
-1		-1	3	-1	3	
	1	-3	1	-3	0	
3		3	0	3		
	1	0	1	0		

Así, la ecuación inicial se puede expresar de la forma $(x + 1)^2 (x - 3) (x^2 + 1) = 0$. Como el polinomio está factorizado las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ doble $\qquad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \qquad x^2 + 1 = 0$ no tiene solución

Por tanto, las soluciones son $x = 3$ y $x = -1$ doble.

Ecuaciones bicuadradas

Una ecuación bicuadrada es una ecuación polinómica de grado cuatro equivalente a una de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$.

Una ecuación de este tipo se resuelve transformándola en una ecuación de segundo grado con el cambio de variable $t = x^2$. Sustituyendo en la ecuación inicial se obtiene la ecuación polinómica de grado dos, $at^2 + bt + c = 0$. Resolviendo esta ecuación y considerando que $x = \pm\sqrt{t}$, se obtienen, si existen, las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 13: Resolver la ecuación $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación $t^2 - t - 6 = 0$, de donde $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son únicamente $x = \pm\sqrt{3}$ ya que $\pm\sqrt{-2}$ no son números reales.