EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRAL INDEFINIDA

1. Dada la función $f(x) = 3x^5 + \dfrac{2}{x^3}$:

a) Calcular todas sus funciones primitivas.

b) Determinar la función primitiva cuya gráfica pasa por el punto (1, 6).

c) Determinar la función primitiva $F(x)$ que verifica $F(-1) = \dfrac{-1}{2}$.

Solución

a) Las primitivas de $f(x)$ son de la forma $F(x) = \dfrac{x^6}{2} - \dfrac{1}{x^2} + C$, siendo C una constante real, ya que $F'(x) = 3x^5 + \dfrac{2}{x^3} = f(x)$

b) La función primitiva $F(x) = \dfrac{x^6}{2} - \dfrac{1}{x^2} + C$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 6) ha de verificar $F(1) = 6$, es decir, $\dfrac{1^6}{2} - \dfrac{1}{1^2} + C = 6$, de donde $C = 7 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{2}$.

Por tanto la primitiva que se busca es $F(x) = \dfrac{x^6}{2} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{13}{2}$.

c) La función primitiva $F(x) = \dfrac{x^6}{2} - \dfrac{1}{x^2} + C$ ha de verificar $F(-1) = \dfrac{-1}{2}$, es decir, $\dfrac{(-1)^6}{2} - \dfrac{1}{(-1)^2} + C = \dfrac{-1}{2}$, de donde $C = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$.

Por tanto la primitiva que se busca es $F(x) = \dfrac{x^6}{2} - \dfrac{1}{x^2}$.

2. Calcular las siguientes integrales utilizando la tabla de integrales inmediatas:

a) $\displaystyle\int \left(3 + 4x^5 - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$ **b)** $\displaystyle\int \left(6e^x + 4^x\right) dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x-1}} dx$

e) $\displaystyle\int \frac{7}{\sqrt[5]{(2x-1)^2}} dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{x^3}{4 - 5x^4} dx$ **g)** $\displaystyle\int (4x+1)^2 dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

i) $\displaystyle\int 5^{x^3+1} x^2\, dx$ **j)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)}$ **k)** $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx$ **l)** $\displaystyle\int \frac{4^x - 2^x}{3^x} dx$

ll) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$ **m)** $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} dx$ **n)** $\displaystyle\int \frac{1 + x^2}{x^2} dx$ **o)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$

Solución

a) Utilizando las propiedades de linealidad y la tabla de integrales inmediatas se tiene:

$$\int\left(3+4x^5-\frac{8}{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx = 3\int dx + 4\int x^5 dx - 8\int \frac{1}{x}dx + \int x^{\frac{2}{3}}dx = 3x + 4\frac{x^6}{6} - 8\ln x + \frac{x^{1+\frac{2}{3}}}{1+\frac{2}{3}} + C =$$

$$= 3x + 4\frac{x^6}{6} - 8\ln x + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = 3x + \frac{2}{3}x^6 - 8\ln x + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C = 3x + \frac{2}{3}x^6 - 8\ln x + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$$

b) Utilizando las propiedades de linealidad y la tabla de integrales inmediatas se tiene:

$$\int\left(6e^x + 4^x\right)dx = 6\int e^x dx + \int 4^x dx = 6e^x + \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}dx = \ln(1+\operatorname{sen} x) + C$

En este caso en el numerador es la derivada del denominador por lo que la integral es el logaritmo neperiano del denominador.

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x-1}}dx = \int \frac{2}{2}\frac{5}{5}\frac{1}{\sqrt{5x-1}}dx = \frac{2}{5}\int \frac{1}{2\sqrt{5x-1}}5\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{5x-1} + C$

Se ha multiplicado y dividido por 2 para tener la derivada de la raíz y se ha multiplicado y dividido por 5 para tener la derivada del radicando.

e) $\displaystyle\int \frac{7}{\sqrt[5]{(2x-1)^2}}dx = 7\int (2x-1)^{-\frac{2}{5}}dx = 7\int \frac{2}{2}(2x-1)^{-\frac{2}{5}}dx = \frac{7}{2}\int (2x-1)^{-\frac{2}{5}}2\,dx = \frac{7}{2}\frac{(2x-1)^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1} + C =$

$$= \frac{7}{2}\frac{(2x-1)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + C = \frac{5}{2}\sqrt[5]{(2x-1)^3} + C$$

El 7 sale fuera de la integral por linealidad y se multiplica y divide por 2 para tener en el integrando la derivada de la función $2x - 1$ que aparece en la base.

f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{4-5x^4}dx = \int \frac{1}{-20}\frac{-20x^3}{4-5x^4}dx = -\frac{1}{20}\int \frac{-20x^3}{4-5x^4}dx = -\frac{1}{20}\ln(4-5x^4) + C$

Se multiplica y divide por -20 para tener en el numerador la derivada del polinomio del denominador y se integra la fracción obtenida dando lugar a un logaritmo.

g) $\displaystyle\int (4x+1)^2 dx = \int \frac{4}{4}(4x+1)^2 dx = \frac{1}{4}\int (4x+1)^2 4dx = \frac{1}{4}\frac{(4x+1)^3}{3} + C = \frac{1}{12}(4x+1)^3 + C$

Se multiplica y divide por 4 para tener en el integrando la derivada de la función $4x + 1$ que aparece en la base.

h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$

Se multiplica y divide por 2 para tener en el integrando la derivada de la función $\sqrt{x}$ que aparece en el exponente.

i) $\int 5^{x^3+1} x^2\,dx = \int \frac{3}{3}5^{x^3+1}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int 5^{x^3+1}\,3x^2\,dx = \frac{1}{3}\frac{5^{x^3+1}}{\ln 5} + C$

Se multiplica y divide por 3 para tener en el integrando la derivada de la función x^3+1 que aparece en el exponente.

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = \int \frac{2}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3+\sqrt{x}}\,dx = 2\ln\left(3+\sqrt{x}\right) + C$

Se multiplica y divide por 2 para tener en el numerador la derivada de la función $3+\sqrt{x}$ que aparece en el denominador.

k) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + C$

Se multiplica y divide por -1 para tener en el numerador la derivada del denominador.

l) $\int \frac{4^x - 2^x}{3^x}\,dx = \int \left(\frac{4^x}{3^x} - \frac{2^x}{3^x}\right)dx = \int \left(\frac{4}{3}\right)^x dx - \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln\frac{4}{3}} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} + C$

ll) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

En el integrando están la función ln$x$ y su derivada $\frac{1}{x}$ por lo que se puede integrar como una potencia de base ln$x$.

m) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln(\ln x) + C$

En $\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$ está en el numerador la derivada del denominador por lo que se integra de forma inmediata dando lugar al logaritmo del denominador.

n) $\int \frac{1+x^2}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{x^2}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx + \int 1dx = \frac{x^{-1}}{-1} + x + C = \frac{-1}{x} + x + C$

o) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \operatorname{arctg} x + C$

3. Calcular las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ con $\sqrt{e^x - 1} = t$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)}$ con $\sqrt{x} = t$

Solución

a) Elevando al cuadrado en la igualdad $\sqrt{e^x - 1} = t$ queda $e^x - 1 = t^2$, es decir, $e^x = 1 + t^2$.
Diferenciando en la última igualdad se obtiene: $e^x dx = 2t\, dt$, de donde, $dx = \frac{2t}{e^x} dt = \frac{2t}{1 + t^2} dt$.
Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} dt}{t} = 2 \int \frac{1}{1 + t^2} dt = 2 \operatorname{arctg} t + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C$

b) Elevando al cuadrado en la igualdad $\sqrt{x} = t$ queda $x = t^2$.
Diferenciando se obtiene: $dx = 2t\, dt$.
Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)} = \int \frac{2t\, dt}{t(3 + t)} = 2 \int \frac{1}{3 + t} dt = 2 \ln(3 + t) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)} = 2 \ln(3 + \sqrt{x}) + C$

Nota: Esta integral también se puede resolver como inmediata tal y como se ha visto en el ejercicio 2j.

4. Calcular las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

a) $\int (3x^2 - 8x + 4)\, e^{-2x} dx$ **b)** $\int (x - 1) \operatorname{sen} 3x\, dx$ **c)** $\int \left(x^2 + 8\right) \ln x\, dx$ **d)** $\int \ln x\, dx$

Solución

a) Se consideran las siguientes partes:

$$\begin{cases} u = 3x^2 - 8x + 4 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = (6x - 8)\, dx \\ v = \dfrac{-e^{-2x}}{2} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (3x^2 - 8x + 4)\, e^{-2x} dx = (3x^2 - 8x + 4) \frac{-e^{-2x}}{2} - \int (6x - 8) \frac{-e^{-2x}}{2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x^2 - 8x + 4)\, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int (6x - 8)\, e^{-2x} dx$$

Para resolver la integral $\int (6x-8)\,e^{-2x}dx$ se aplica de nuevo el método de integración por partes tomando:

$$\begin{cases} u = 6x-8 \\ dv = e^{-2x}dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = 6\,dx \\ v = \dfrac{-e^{-2x}}{2} \end{cases}$$

Así,

$$\int (6x-8)\,\mathrm{e}^{-2x}dx = (6x-8)\,\frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2} - \int 6\,\frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2}\,dx = -\frac{1}{2}(6x-8)\,\mathrm{e}^{-2x} + 3\int \mathrm{e}^{-2x}\,dx =$$
$$= (4-3x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 3\,\frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2} + C = \left(\frac{5}{2} - 3x\right)\mathrm{e}^{-2x} + C$$

Sustituyendo en la integral inicial queda:

$$\int (3x^2-8x+4)\,e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(3x^2-8x+4)\,e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{2}-3x\right)\mathrm{e}^{-2x} + C\right) = \frac{1}{2}\left(-3x^2+5x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} + C$$

b) Se consideran las siguientes partes:

$$\begin{cases} u = x-1 \\ dv = \operatorname{sen} 3x\,dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-\cos 3x}{3} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (x-1)\operatorname{sen} 3x\,dx = (x-1)\,\frac{-\cos 3x}{3} - \int \frac{-\cos 3x}{3}\,dx = -\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x + \frac{1}{3}\,\frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + C = -\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x + C$$

c) Se aplica el método de integración por partes tomando:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^2+8)\,dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} + 8x \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (x^2+8)\ln x\,dx = \ln x\left(\frac{x^3}{3}+8x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3}+8x\right)\frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+8x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3}+8\right)dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{3}+8x\right)\ln x - \left(\frac{x^3}{9}+8x\right) + C$$

d) Se aplica el método de integración por partes tomando:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 1\,dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ v = x \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int \ln x\, dx = (\ln x)x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

5. Calcular las siguientes integrales racionales:

a) $\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$ **b)** $\int \frac{1}{2x^2 - 9x - 5} dx$ **c)** $\int \frac{dx}{6 + x - x^2}$ **d)** $\int \frac{x}{x^2 + 6x + 9} dx$

e) $\int \frac{dx}{16x^3 - 8x^2 + x}$ **f)** $\int \frac{3x^2 - 5x + 7}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4} dx$ **g)** $\int \frac{x - 2}{x^3 - 2x^2 - 16x + 32} dx$ **h)** $\int \frac{x^3 - 4}{x^2 + 2x} dx$

Solución

a) Como el grado del polinomio del numerador es menor que el del polinomio del denominador para resolver la integral racional se descompone el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador:

$$x^2 + x - 2 = 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \quad \text{de donde} \quad x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Así, $\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1 = A(x+2) + B(x-1)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3} \\ x = -2 \Rightarrow 1 = -3B \Rightarrow B = \frac{-1}{3} \end{cases}$

Por tanto, $\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(\frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{3} \ln(x+2) + C =$$
$$= \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} + C$$

b) Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador a partir de sus raíces:

$$2x^2 - 9x - 5 = 0, \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{4} = \begin{cases} 5 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{de donde} \quad 2x^2 - 9x - 5 = 2(x-5)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-5)(2x+1)$$

Así, $\frac{1}{2x^2 - 9x - 5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1) + B(x-5)}{(x-5)(2x+1)}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1 = A(2x+1) + B(x-5)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x: $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow 1=-\dfrac{11}{2}B \Rightarrow B=-\dfrac{2}{11} \\ x=5 \Rightarrow 1=11A \Rightarrow A=\dfrac{1}{11} \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{2x^2-9x-5}=\dfrac{1/11}{x-5}+\dfrac{-2/11}{2x+1}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{2x^2-9x-5}dx=\int\left(\frac{1/11}{x-5}+\frac{-2/11}{2x+1}\right)dx=\frac{1}{11}\int\frac{1}{x-5}dx-\frac{2}{11}\int\frac{1}{2x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{11}\int\frac{1}{x-5}dx-\frac{1}{11}\int\frac{2}{2x+1}dx=\frac{1}{11}\ln(x-5)-\frac{1}{11}\ln(2x+1)+C=\ln\sqrt[11]{\frac{x-5}{2x+1}}$$

c) Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador a partir de sus raíces:

$$6+x-x^2=0,\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2}=\begin{cases}-2\\3\end{cases}\quad \text{de donde}\quad 6+x-x^2=-(x+2)(x-3)=(x+2)(3-x)$$

Así, $\dfrac{1}{6+x-x^2}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{3-x}=\dfrac{A(3-x)+B(x+2)}{(x+2)(3-x)}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1=A(3-x)+B(x+2)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x: $\begin{cases} x=3 \Rightarrow 1=5B \Rightarrow B=\dfrac{1}{5} \\ x=-2 \Rightarrow 1=5A \Rightarrow A=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{6+x-x^2}=\dfrac{1/5}{x+2}+\dfrac{1/5}{3-x}$, e integrando:

$$\int\frac{1}{6+x-x^2}dx=\int\left(\frac{1/5}{x+2}+\frac{1/5}{3-x}\right)dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{3-x}dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+2}dx-\frac{1}{5}\int\frac{-1}{3-x}dx=$$
$$=\frac{1}{5}\ln(x+2)-\frac{1}{5}\ln(3-x)+C=\ln\sqrt[5]{\frac{x+2}{3-x}}+C$$

d) Al ser $x^2+6x+9=(x+3)^2$, la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{x}{x^2+6x+9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}=\frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $x=A(x+3)+B$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x:

$$\begin{cases} x=-3 \Rightarrow -3=B \Rightarrow B=-3 \\ x=0 \Rightarrow 0=3A+B \Rightarrow 0=3A+(-3) \Rightarrow A=1 \end{cases}$$

Por tanto, $\dfrac{x}{x^2+6x+9}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{-3}{(x+3)^2}$, e integrando:

$$\int \frac{x}{x^2+6x+9}\,dx = \int\left(\frac{1}{x+3}+\frac{-3}{(x+3)^2}\right)dx = \int \frac{1}{x+3}\,dx - 3\int (x+3)^{-2}\,dx = \ln(x+3) - 3\frac{(x-3)^{-1}}{-1} + C =$$
$$= \ln(x+3) + \frac{3}{x+3} + C$$

e) Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador a partir de sus raíces:

$$16x^3 - 8x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(16x^2 - 8x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 16x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-64}}{32} = \dfrac{1}{4} \ \text{(doble)} \end{cases}$$

Por tanto, $16x^3 - 8x^2 + x = 16x\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = x(4x-1)^2$

Así, $\dfrac{1}{16x^3 - 8x^2 + x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{4x-1} + \dfrac{C}{(4x-1)^2} = \dfrac{A(4x-1)^2 + Bx(4x-1) + Cx}{x(4x-1)^2}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1 = A(4x-1)^2 + Bx(4x-1) + Cx$

Para obtener los valores de A, B y C se dan tres valores a x: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 1 = A \Rightarrow A = 1 \\ x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 = \dfrac{C}{4} \Rightarrow C = 4 \\ x = 1 \Rightarrow 1 = 9A + 3B + C \Rightarrow B = -4 \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{16x^3 - 8x^2 + x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-4}{4x-1} + \dfrac{4}{(4x-1)^2}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{16x^3 - 8x^2 + x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{-4}{4x-1} + \frac{4}{(4x-1)^2}\right)dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{4}{4x-1}\,dx + \int (4x-1)^{-2}\,4\,dx =$$
$$= \ln x - \ln(4x-1) + \frac{(4x-1)^{-1}}{-1} + C = \ln x - \ln(4x-1) - \frac{1}{4x-1} + C = \ln\frac{x}{4x-1} - \frac{1}{4x-1} + C$$

f) Se factoriza el polinomio del denominador $x^3 + 2x^2 - 7x + 4$, para lo que se calculan sus raíces:

	1	2	-7	4
1		1	3	-4
	1	3	-4	0
1		1	4	
	1	4	0	
-4		-4		
	1	0		

Por tanto, el polinomio del denominador se puede escribir $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x+4)(x-1)^2$ y la descomposición en fracciones simples queda:

$$\frac{3x^2 - 5x + 7}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+4)(x-1) + C(x+4)}{(x+4)(x-1)^2}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $3x^2 - 5x + 7 = A(x-1)^2 + B(x+4)(x-1) + C(x+4)$

Para obtener los valores de A, B y C se dan tres valores a x: $\begin{cases} x = -4 \Rightarrow 75 = 25A \Rightarrow A = 3 \\ x = 1 \Rightarrow 5 = 5C \Rightarrow C = 1 \\ x = 0 \Rightarrow 7 = A - 4B + 4C \Rightarrow B = 0 \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{3x^2 - 5x + 7}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4} = \dfrac{3}{x+4} + \dfrac{0}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{x+4} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$, e integrando:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 7}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+4} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = 3\int \frac{1}{x+4}\,dx + \int (x-1)^{-2}\,dx =$$
$$= 3\ln(x+4) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = 3\ln(x+4) - \frac{1}{x-1} + C$$

g) Se factoriza el polinomio del denominador $x^3 - 2x^2 - 16x + 32$:

	1	-2	-16	32
2		2	0	-32
	1	0	-16	0

Por tanto, el polinomio del denominador se puede escribir de la forma $x^3 - 2x^2 - 16x + 32 = (x-2)(x^2 - 16) = (x-2)(x+4)(x-4)$ y la función del integrando queda:

$$\frac{x-2}{x^3 - 2x^2 - 16x + 32} = \frac{x-2}{(x-2)(x+4)(x-4)} = \frac{1}{(x+4)(x-4)}$$

La descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{1}{(x+4)(x-4)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x+4)}{(x+4)(x-4)}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1 = A(x-4) + B(x+4)$

Se obtienen los valores de A y B dando dos valores a x: $\begin{cases} x = 4 \Rightarrow 1 = 8B \Rightarrow B = \dfrac{1}{8} \\ x = -4 \Rightarrow 1 = -8A \Rightarrow A = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{(x+4)(x-4)} = \dfrac{-1/8}{x+4} + \dfrac{1/8}{x-4}$, e integrando:

$$\int \frac{x+2}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}dx = \int \frac{1}{(x+4)(x-4)}\,dx = \int \left(\frac{-1/8}{x+4} + \frac{1/8}{x-4} \right) dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{x+4}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-4}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{8}\ln(x+4) + \frac{1}{8}\ln(x-4) + C = \ln \sqrt[8]{\frac{x-4}{x+4}} + C$$

h) Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, se ha de realizar en primer lugar la división polinómica quedando:

$$\begin{array}{rl} x^3 - 4 & \underline{|x^2 + 2x} \\ \underline{-x^3 - 2x^2} & x - 2 \\ / \ -2x^2 - 4 & \\ \underline{2x^2 + 4x} & \\ / \ 4x - 4 & \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 2x} = x - 2 + \dfrac{4x - 4}{x^2 + 2x}$

Así, $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4}{x^2 + 2x} dx = \int \left(x - 2 + \frac{4x - 4}{x^2 + 2x} \right) dx = \int (x - 2)\, dx + \int \frac{4x - 4}{x^2 + 2x}\, dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{4x - 4}{x^2 + 2x}\, dx$

La integral $\displaystyle\int \frac{4x - 4}{x^2 + 2x} dx$ se resuelve descomponiendo en fracciones simples la función del integrando. Al ser $x^2 + 2x = x(x + 2)$, la descomposición es:

$$\frac{4x - 4}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + Bx}{x(x + 2)}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $4x - 4 = A(x + 2) + Bx$

Se obtienen los valores de A y B dando dos valores a x: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow -4 = 2A \Rightarrow A = -2 \\ x = -2 \Rightarrow -12 = -2B \Rightarrow B = 6 \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{4x - 4}{x^2 + 2x} = \dfrac{-2}{x} + \dfrac{6}{x + 2}$, e integrando:

$$\int \frac{4x - 4}{x^2 + 2x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{6}{x + 2} \right) dx = -2\int \frac{1}{x} dx + 6\int \frac{1}{x + 2} dx = -2 \ln x + 6 \ln(x + 2) + C$$

Sustituyendo en la integral inicial queda:

$$\int \frac{x^3 - 4}{x^2 + 2x} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 2 \ln x + 6 \ln(x + 2) + C$$

6. Utilizando el cambio de variable indicado, transformar las siguientes integrales en integrales racionales y resolverlas:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$ con $e^x = t$ **b)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 1}{1 + \sqrt{x}} dx$ con $\sqrt{x} = t$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{5^x - 1} dx$ con $5^x = t$

Solución

a) Diferenciando en la igualdad $e^x = t$ queda $e^x dx = dt$.

Sustituyendo el cambio en la integral inicial se obtiene la siguiente integral racional en la variable t:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

Al ser $t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$, la descomposición en fracciones simples a considerar es:

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 1} = \frac{A(t - 1) + B(t + 1)}{(t + 1)(t - 1)}$$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $1 = A(t - 1) + B(t + 1)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a t: $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow 1 = 2B \Rightarrow B = \dfrac{1}{2} \\ t = -1 \Rightarrow 1 = -2A \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{-1/2}{t+1} + \dfrac{1/2}{t-1}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int \left(\frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1} \right) dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(t-1) + C =$$
$$= \ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C$

b) Elevando al cuadrado en la igualdad $\sqrt{x} = t$ queda $x = t^2$ y diferenciando se obtiene $dx = 2t\,dt$. Sustituyendo en la integral inicial queda:

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t-1}{1+t} 2t\,dt = 2\int \frac{t^2-t}{1+t}\,dt$$

La integral $\displaystyle\int \frac{t^2-t}{1+t}$ es una integral racional en la que el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, por lo que se debe efectuar la división polinómica:

$$\begin{array}{rl} t^2 - t & \underline{|1+t} \\ \underline{-t^2 - t} & t-2 \\ /\ \ -2t & \\ \underline{2t+2} & \\ /\ \ \ 2 & \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{t^2-t}{1+t} = t - 2 + \dfrac{2}{1+t}$

Así, $\displaystyle\int \frac{t^2-t}{1+t}\,dt = \int \left(t - 2 + \frac{2}{1+t} \right) dt = \int (t-2)\,dt + \int \frac{2}{1+t}\,dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln(1+t) + C$

Deshaciendo el cambio de variable resulta:

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\left(\frac{x}{2} - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C \right) = x - 4\sqrt{x} + 4\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

c) Diferenciando en la igualdad $5^x = t$ queda $5^x \ln 5\,dx = dt$, de donde, $dx = \dfrac{dt}{5^x \ln 5} = \dfrac{dt}{t \ln 5}$.

Sustituyendo en la integral inicial se obtiene:

$$\int \frac{1}{5^x - 1}\,dx = \int \frac{1}{t-1}\frac{dt}{t\ln 5} = \frac{1}{\ln 5}\int \frac{1}{t(t-1)}\,dt$$

$\displaystyle\int \frac{1}{t(t-1)}\,dt$ es una integral racional que se resuelve considerando la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}$$

Al ser iguales los denominadores, se igualan los numeradores: $1 = A(t-1) + Bt$

Se obtienen los valores de A y B dando dos valores a t: $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow 1 = B \Rightarrow B = 1 \\ t = 0 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1 \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{1}{t(t-1)} = \dfrac{-1}{t} + \dfrac{1}{t-1}$, e integrando:

$$\int \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \int\left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1}\right)dt = -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{1}{t-1}\,dt = -\ln t + \ln(t-1) + C = \ln\frac{t-1}{t} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta:

$$\int \frac{1}{5^x - 1}\,dx = \frac{1}{\ln 5}\ln\frac{5^x - 1}{5^x} + C$$

7. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x \ln\left(1 + x^2\right) dx$ **b)** $\int \dfrac{10x}{(x^2 - 8)^4}\,dx$ **c)** $\int \dfrac{x + 17}{x^2 + x - 12}\,dx$

d) $\int (5x + 6)\, e^x\, dx$ **e)** $\int \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 4}\,dx$ **f)** $\int \dfrac{x^3}{x + 1}\,dx$

Solución

a) Para resolver la integral se utiliza el método de integración por partes tomando:

$$\begin{cases} u = \ln\left(1 + x^2\right) \\ dv = x\,dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = \dfrac{2x}{1 + x^2}\,dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int x \ln\left(1 + x^2\right) dx = \ln\left(1 + x^2\right)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\left(1 + x^2\right) - \int \frac{x^3}{1 + x^2}\,dx$$

La integral $\int \dfrac{x^3}{1 + x^2}\,dx$ es racional y el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, por lo que en primer lugar se ha de realizar la división polinómica quedando:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x & x \\ \hline / \;\; -x & \end{array} \qquad \text{Por tanto, } \frac{x^3}{1 + x^2} = x - \frac{x}{1 + x^2}$$

Así, $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^2}\,dx = \int\left(x - \frac{x}{1 + x^2}\right)dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{1 + x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

Sustituyendo en la integral inicial queda:

$$\int x\ln\left(1+x^2\right)dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(1+x^2\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

b) $\int \frac{10x}{(x^2-8)^4}dx = 5\int (x^2-8)^{-4}\,2x\,dx = 5\frac{(x^2-8)^{-3}}{-3} + C = -\frac{5}{3(x^2-8)^3} + C$

c) Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador a partir de sus raíces:

$$x^2 + x - 12 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases} \text{ de donde } x^2 + x - 12 = (x-4)(x+3)$$

Así, $\frac{x+17}{x^2+x-12} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-4)}{(x-4)(x+3)}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $x + 17 = A(x+3) + B(x-4)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x: $\begin{cases} x = -3 \Rightarrow 14 = -7B \Rightarrow B = -2 \\ x = 4 \Rightarrow 21 = 7A \Rightarrow A = 3 \end{cases}$

Por tanto, $\frac{x+17}{x^2+x-12} = \frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+3}$, e integrando:

$$\int \frac{x+17}{x^2+x-12}dx = \int\left(\frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+3}\right)dx = 3\int \frac{1}{x-4}dx - 2\int \frac{1}{x+3}dx = 3\ln(x-4) - 2\ln(x+3) + C$$

d) Se consideran las siguientes partes:

$$\begin{cases} u = 5x+6 \\ dv = e^x dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = 5\,dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (5x+6)\,e^x\,dx = (5x+6)\,e^x - \int 5\,e^x dx = (5x+6)\,e^x - 5\,e^x + C = (5x+1)\,e^x + C$$

e) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+4}dx = \int \frac{2}{2}\frac{x-1}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx = \ln(x^2-2x+4) + C$

Se multiplica y divide por 2 para tener en el numerador la derivada del polinomio del denominador y se integra la fracción obtenida dando lugar a un logaritmo.

f) $\int \frac{x^3}{x+1}dx$

Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, se ha de realizar en primer lugar la división polinómica quedando:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 - x^2} & x^2 - x + 1 \\
/ \ -x^2 & \\
\quad \underline{x^2 + x} & \\
\quad / \ x & \\
\quad \underline{-x - 1} & \\
\quad\ / \ -1 &
\end{array}
$$

Por tanto, $\dfrac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 + \dfrac{-1}{x+1}$

Así, $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \int\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int (x^2 - x + 1)\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + C$