INTEGRALES INMEDIATAS

Hay casos en los que la integral indefinida se calcula de forma inmediata, ya que la función integrando es la derivada de una función conocida. Se llaman **integrales inmediatas** a aquellas cuya expresión puede ser obtenida a partir de la tabla de derivadas de las funciones elementales. A continuación, se exponen las integrales inmediatas más utilizadas, siendo la segunda columna una generalización de la primera.

$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ si $a \neq -1$	$\int \left(f(x)\right)^a f'(x)\,dx = \frac{\left(f(x)\right)^{a+1}}{a+1} + C$ si $a \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx = \sqrt{f(x)} + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ si $a > 0$	$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$ si $a > 0$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen} f(x)\, f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos f(x)\, f'(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$

A partir de esta tabla y utilizando las propiedades de linealidad de la integral se pueden calcular algunas integrales indefinidas.

Ejemplo 5 (relativo a integrales que se resuelven aplicando la primera columna de la tabla anterior)

a) $\int (2x^3 + 5x^2 - 7x + 1)\,dx = 2\int x^3 dx + 5\int x^2 dx - 7\int x\,dx + \int dx = 2\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + x + C$

b) $\int \left(x^4 - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^4\,dx - \int \frac{3}{x^3}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \int x^4\,dx - 3\int x^{-3}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^5}{5} - 3\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \ln x + C = \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2x^2} + \ln x + C$

c) $\int\left(\sqrt[5]{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int x^{\frac{4}{5}}\,dx-\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1}-\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{5x^{\frac{9}{5}}}{9}-\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+C=\frac{5\sqrt[5]{x^9}}{9}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+C=\frac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+C$

d) $\int\left(2^x+3x\right)dx=\int 2^x\,dx+3\int x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3x^2}{2}+C$

e) $\int\left(e^x-5\operatorname{sen}x+\cos x\right)dx=\int e^x\,dx-5\int \operatorname{sen}x\,dx+\int\cos x\,dx=e^x+5\cos x+\operatorname{sen}x+C$

f) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=2\int\frac{dx}{1+x^2}-5\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{arctg}x-5\operatorname{arcsen}x+C$

Ejemplo 6 (relativo a integrales que se resuelven aplicando la segunda columna de la tabla anterior)

a) $\int(1-2x)^3\,dx$, al ser la función integrando una potencia de base (1-2*x*)veamos si se puede aplicar la igualdad de la tabla dada por: $\int\left(f(x)\right)^a f'(x)\,dx=\frac{\left(f(x)\right)^{a+1}}{a+1}+C$ con $a=3$

Para ello se necesita tener en la función integrando la derivada de la base que en este caso es -2, por lo que se multiplica y divide por este número y aplicando la linealidad de la integral queda:

$$\int(1-2x)^3\,dx=\int\frac{-2}{-2}(1-2x)^3\,dx\,\frac{1}{-2}\int(1-2x)^3(-2)\,dx=-\frac{1}{2}\frac{(1-2x)^4}{4}+C=-\frac{(1-2x)^4}{8}+C$$

b) $\int\sqrt[3]{3x-2}\,dx=\int(3x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx=\int\frac{3}{3}(3x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{1}{3}\int(3x-2)^{\frac{1}{3}}\,3\,dx=\frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{(3x-2)^{\frac{4}{3}}}{4}+C=\frac{\sqrt[3]{(3x-2)^4}}{4}+C$

c) $\int\frac{10x-7}{5x^2-7x+1}\,dx=\ln\left(5x^2-7x+1\right)+C$

e) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+2}}=\int\frac{3}{3}\frac{2}{2}\frac{dx}{\sqrt{3x+2}}=\frac{2}{3}\int\frac{3dx}{2\sqrt{3x+2}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+2}+C$

En este caso, la función integrando se ha multiplicado y dividido por 3 para tener la derivada del radicando y se ha multiplicado y dividido por 2 para tener la derivada de la raíz.

f) $\int e^{-4x}\,dx=\int\frac{-4}{-4}e^{-4x}\,dx=\frac{1}{-4}\int e^{-4x}(-4)\,dx=-\frac{1}{4}e^{-4x}+C$

g) $\int 3^{\operatorname{sen}x}\cos x\,dx=\frac{3^{\operatorname{sen}x}}{\ln 3}+C$

h) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{5+x^2}}=\int\frac{2x\,dx}{2\sqrt{5+x^2}}=\sqrt{5+x^2}+C$

i) $\int\cos 3x\,dx=\int\frac{3}{3}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int 3\cos 3x\,dx=\frac{\operatorname{sen}3x}{3}+C$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Dada la integral $\int f(x)\,dx$, si consideramos x como una función de otra variable, $x = g(t)$, entonces $dx = g'(t)\ dt$, y sustituyendo en la integral inicial se obtiene $\int f(g(t))\ g'(t)\ dt$.

En el caso de que esta segunda integral sea más sencilla que la primera, se resuelve en la variable *t* y posteriormente se deshace el cambio de variable sustituyendo *t* en función de *x*.
En resumen, para realizar un cambio de variable en una integral se realizan los siguientes pasos:

1.- Se elige el cambio de variable que se quiere realizar indicando la expresión que relaciona la variable *x* inicial con la nueva variable *t*.
2.- Se calcula *dx* en función de la variable *t* y *dt*.
3.- Se sustituye en la integral la variable *x* y *dx* por las expresiones en la variable *t* y *dt*. La nueva integral obtenida solamente debe depender de *t*.
4.- Se resuelve esta integral, obteniendo la solución en la variable *t*.
5.- Se deshace el cambio de variable, dando el resultado en la variable inicial *x*.

Ejemplo 7:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx$, esta integral no es inmediata ya que no se ajusta a ningún caso de la tabla. Para resolverla se hace el cambio de variable $\sqrt{x-2}=t$, elevando al cuadrado queda $x-2=t^2$ y despejando x, $x=t^2+2$

Diferenciando la igualdad anterior se obtiene $dx = 2t\,dt$.

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx = \int \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2}}2t\,dt = 2\int \frac{t^2+2}{t}t dt = 2\int (t^2+2)dt = 2\int t^2 dt + 4\int dt = 2\frac{t^3}{3} + 4t + C$$

Deshaciendo el cambio resulta $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + 4\sqrt{x-2} + C$

b) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$, para resolver esta integral se hace el cambio de variable $e^x = t$

Diferenciando la igualdad anterior queda $e^x\,dx = dt$, es decir, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = \int \frac{t^2}{(t+1)}\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t+1}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \int dt - \int \frac{1}{t+1}dt = t - \ln(t+1) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = e^x - \ln(e^x+1) + C$

Observación: Las integrales inmediatas generalizadas (segunda columna) también se pueden calcular mediante cambio de variable.

Ejemplo 8:

a) $\int (1-2x)^3\,dx$, esta integral es inmediata como se ha comprobado en el ejemplo 6, pero también se puede resolver realizando el cambio de variable $\begin{cases} t = 1-2x \\ dt = -2dx \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int (1-2x)^3\,dx = \int t^3\frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2}\int t^3 dt = -\frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + C = -\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C$$

b) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x-1}}$, esta integral es inmediata y se puede resolver aplicando la tabla, ya que es fácil obtener en el numerador la derivada del radicando.

También se puede resolver mediante el cambio de variable $\begin{cases} t = 3\text{sen}\,x - 1 \\ dt = 3\cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx = \frac{dt}{3} \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x-1}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-1/3}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3sen\,x-1)^2} + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean $u(x)$, $v(x)$ funciones derivables, teniendo en cuenta que la derivada del producto es:

$$\left(u(x)\,v(x)\right)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

integrando queda:

$\int (u(x)\,v(x))'\,dx = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx$, es decir,

$u(x)\,v(x) = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx$

Despejando el último sumando se obtiene: $\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$

Teniendo en cuenta que $du = u'(x)\,dx$ y $dv = v'(x)\,dx$, en la práctica la fórmula de integración por partes se escribe: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$

La expresión de integración por partes permite escribir una integral en función de otra, y será útil si ésta última es más sencilla que la inicial. Algunas veces es necesario emplear el método varias veces o bien combinarlo con otros métodos.

Ejemplo 9:

a) $\int (2x+1)e^x dx$

Para resolver la integral, se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x - 2e^x + C$$

b) $\int (x^2-5)\cos x\,dx$

Se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = x^2-5 \\ dv = \cos x\,dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = 2x dx \\ v = \text{sen}x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (x^2-5)\cos x\,dx = (x^2-5)\,\text{sen}x - \int 2x\,\text{sen}x\,dx = (x^2-5)\,\text{sen}x - 2\int x\,\text{sen}x\,dx$$

Para resolver la integral $\int x\,\text{sen}x\,dx$, se aplica de nuevo el método de integración por partes:

$\begin{cases} u = x \\ dv = \text{sen}x\,dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Por tanto, $\int x\,\text{sen}x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \text{sen}x + C$

Sustituyendo en la integral inicial se obtiene: $\int (x^2-5)\cos x\,dx = (x^2-5)\,\text{sen}x + 2x\cos x - 2\text{sen}x + C$

c) $\int x^3 \ln x\,dx$

Para resolver la integral, se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3\,dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Observación:

En general, las integrales del tipo $\int P_n(x)e^{ax}\,dx$, $\int P_n(x)\,\text{sen}\,ax\,dx$, $\int P_n(x)\cos ax\,dx$ siendo $P_n(x)$ un polinomio de grado n, se resuelven utilizando el método de integración por partes tomando $u = P_n(x)$. Sin embargo, en las integrales del tipo $\int P_n(x)\ln x\,dx$, se toma $u = \ln x$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Se denomina **función racional** a cualquier función de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad \text{siendo } a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

En este apartado únicamente consideraremos funciones racionales en las que las raíces de $Q(x)$ sean reales.

Algunas funciones racionales se integran de forma inmediata; entre otras las **fracciones simples** de la forma $\dfrac{A}{(ax + b)^n}$ con $n \in \mathbb{R}$

Ejemplo 10:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-5} = \ln(x-5) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^4} = \int (x+1)^{-4}\,dx = \frac{(x+1)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3(x+1)^3} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x-2}\,dx = \ln(x^2-5x-2) + C$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x+1} = \int \frac{1}{4}\frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\ln(4x+1) + C$

e) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(3x+1)^2} = 7\int \frac{3}{3}(3x+1)^{-2}\,dx = \frac{7}{3}\int (3x+1)^{-2}\,3\,dx = \frac{7}{3}\frac{(3x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{7}{3(x+1)} + C$

Si la integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ no es inmediata, se procede de la siguiente forma:

Caso I: Si $grado\,P(x) \geq grado\ Q(x)$ se realiza la división de los polinomios

Sea $C(x)$ el cociente de la división y $R(x)$ el resto, se cumple que: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ con $grado\,R(x) < grado\ Q(x)$

Por tanto, $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$

La integral $\int C(x)\,dx$ es inmediata y la integral $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ en caso de que no sea inmediata, se puede resolver como se indica en el caso II.

Ejemplo 11:

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-1}\,dx$, como el grado del polinomio del numerador no es menor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x+1} & 1 \\ /\quad 2 & \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

Integrando se obtiene $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = x + 2\ln(x-1) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-2}\,dx$, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + \quad 1 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+2x} & x+2 \\ /\quad 2x+1 & \\ \quad \underline{-2x+4} & \\ \qquad 5 & \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x^2+1}{x-2} = x + 2 + \dfrac{5}{x-2}$

Integrando se obtiene $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-2}\,dx = \int \left(x + 2 + \frac{5}{x-2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 5\,\ln(x-2) + C$

Caso II: Si $grado\, P(x) < grado\; Q(x)$ se factoriza $Q(x)$ (Ver Unidad didáctica 2) para descomponer $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simples de la siguiente forma:

- Por cada raíz real simple a, se considera una fracción del tipo $\dfrac{A}{x-a}$ donde A es una constante real a determinar.
- Por cada raíz real múltiple a de multiplicidad r, se cosideran las r fracciones siguientes $\dfrac{A_1}{x-a}$, $\dfrac{A_2}{(x-a)^2}$ ..., $\dfrac{A_r}{(x-a)^r}$ donde A_1, A_2,..., A_r son constantes reales a determinar.

Para determinar las constantes anteriores, se iguala el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a la suma de las fracciones simples consideradas. Una vez determinadas, la resolución de la integral $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se reduce al cálculo de las integrales de las fracciones simples, aplicando la propiedad de linealidad.

Ejemplo 12:

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$, como el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, en este caso no hay que realizar la división. Se calculan las raíces del denominador para factorizarlo:

$$x^2-5x+6=0\ ,\qquad x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}\ \text{, por tanto,}\ \ x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Se descompone $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$ como suma de fracciones simples $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}=\dfrac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

Para determinar las constantes A y B, al ser iguales los denominadores se igualan los numeradores:

$$x+1=A(x-3)+B(x-2)$$

y en esta igualdad se dan dos valores a la variable x (preferentemente los valores de las raíces de $Q(x)$ por simplicidad en los cálculos): $\begin{cases}x=2 \quad\Rightarrow\quad 3=-A\Rightarrow\quad A=-3\\ x=3\quad\Rightarrow\quad 4=B\end{cases}$

Por tanto, la integral inicial queda: $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{-3}{x-2}dx+\int\frac{4}{x-3}dx=-3\ln(x-2)+4\ln(x-3)+C$

b) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-2x+1}=\int\frac{x}{(x-1)^2}dx$

Se descompone el cociente de polinomios como suma de fracciones simples teniendo en cuenta que 1 es raíz doble del polinomio del denominador:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\quad\Rightarrow\quad x=A(x-1)+B\ \ ;\quad\begin{cases}x=1\Rightarrow 1=B\\ x=0\Rightarrow 0=-A+B\Rightarrow\ A=B=1\end{cases}$$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int\frac{x}{x^2-2x+1}=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\ln(x-1)+\int(x-1)^{-2}dx=\ln(x-1)+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C=\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+C$$

c) $\displaystyle\int\frac{2}{x^3+4x^2}dx$, factorizando el polinomio del denominador queda $x^3+4x^2=x^2(x+4)$

Teniendo en cuenta que x=0 es una raíz doble y x=-4 es simple, la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{2}{x^3+4x^2}$ es

$$\frac{2}{x^3+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+4}=\frac{Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2}{x^2(x+4)} \quad\Rightarrow\quad 2=Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2$$

Dando 3 valores a la variable x obtenemos un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las constantes a determinar:

$$\begin{cases} x=0 \;\Rightarrow 2=4B \Rightarrow\; B=\dfrac{1}{2} \\ x=-4 \Rightarrow 2=C(-4)^2 \;\Rightarrow\; C=\dfrac{1}{8} \\ x=-1 \Rightarrow 2=-3A+3B+C \;\Rightarrow 3A=3B+C-2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{8}-2=\dfrac{-3}{8} \;\Rightarrow\; A=-\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int\frac{2}{x^3+4x^2}\,dx=\frac{-1}{8}\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{B}{x^2}\,dx+\frac{1}{8}\int\frac{1}{x+4}\,dx=-\frac{1}{8}\ln x+\frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{8}\ln(x+4)+C=\frac{1}{8}\ln x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8}\ln(x+4)+C$$

d) $\displaystyle\int\frac{dx}{5x^2-11x-12}$

Se calculan las raíces del denominador para factorizarlo:

$$5x^2-11x-12=0\,,\qquad x=\frac{11\pm\sqrt{121+240}}{10}=\frac{11\pm 19}{10}=\begin{cases}3\\ -\dfrac{4}{5}\end{cases}\text{, por tanto, }\; 5x^2-11x-12=5(x-3)\left(x+\frac{4}{5}\right)=(x-3)(5x+4)$$

Se descompone $\dfrac{1}{5x^2-11x-12}$ como suma de fracciones simples $\dfrac{1}{5x^2-11x-12}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{5x+4}=\dfrac{A(5x+4)+B(x-3)}{(x-3)(5x+4)}$

Para determinar las constantes A y B, al ser iguales los denominadores se igualan los numeradores:

$$1=A(5x+4)+B(x-3)$$

Dando dos valores a la variable x: $\begin{cases} x=3 \;\Rightarrow\; 1=19A \;\Rightarrow\; A=\dfrac{1}{19} \\ x=-\dfrac{4}{5} \;\Rightarrow\; 1=-\dfrac{19}{5}B \;\Rightarrow\; B=\dfrac{-5}{19}\end{cases}$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int\frac{dx}{5x^2-11x-12}=\int\frac{dx}{(x-3)(5x+4)}=\int\frac{1}{19}\frac{dx}{x-3}+\int\left(-\frac{5}{19}\right)\frac{dx}{5x+4}=\frac{1}{19}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{19}\int\frac{5\,dx}{5x+4}=\frac{1}{19}\ln(x-3)-\frac{1}{19}\ln(5x+4)+C$$

Observación: En este ejercicio se ha considerado la descomposición en fracciones simples $\dfrac{1}{5x^2-11x-12}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{5x+4}$ en lugar de $\dfrac{1}{5x^2-11x-12}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+\frac{4}{5}}$ para que sea más sencillo el cálculo de las constantes.