Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

7. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x \ln\left(1+x^2\right) dx$ **b)** $\int \frac{10x}{(x^2-8)^4} dx$ **c)** $\int \frac{10x}{(x^2-8)^4} dx$

d) $\int (5x+6)\, e^x \, dx$ **e)** $\int \frac{x-1}{x^2-2x+4} dx$ **f)** $\int \frac{x^3}{x+1} dx$

Solución

a) Para resolver la integral se utiliza el método de integración por partes tomando:

$$\begin{cases} u = \ln\left(1+x^2\right) \\ dv = x\, dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = \dfrac{2x}{1+x^2} dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int x \ln\left(1+x^2\right) dx = \ln\left(1+x^2\right)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln\left(1+x^2\right) - \int \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

La integral $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$ es racional y el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, por lo que en primer lugar se ha de realizar la división polinómica quedando:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline -x^3 - x & x \\ \hline / \quad -x & \end{array} \qquad \text{Por tanto, } \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$$

Así, $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \int x\, dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Sustituyendo en la integral inicial queda:

$$\int x \ln\left(1+x^2\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln\left(1+x^2\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

b) $\int \frac{10x}{(x^2-8)^4} dx = 5\int (x^2-8)^{-4}\, 2x\, dx = 5\,\frac{(x^2-8)^{-3}}{-3} + C = -\frac{5}{3(x^2-8)^3} + C$

c) Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador a partir de sus raíces:

$$x^2 + x - 12 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases} \quad \text{de donde } \; x^2 + x - 12 = (x-4)(x+3)$$

Así, $\frac{x+17}{x^2+x-12} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-4)}{(x-4)(x+3)}$

Al ser iguales los denominadores, se tiene: $x + 17 = A(x+3) + B(x-4)$

Para obtener los valores de A y B se dan dos valores a x: $\begin{cases} x = -3 \Rightarrow 14 = -7B \Rightarrow B = -2 \\ x = 4 \Rightarrow 21 = 7A \Rightarrow A = 3 \end{cases}$

Por tanto, $\dfrac{x+17}{x^2+x-12} = \dfrac{3}{x-4} + \dfrac{-2}{x+3}$, e integrando:

$$\int \frac{x+17}{x^2+x-12}\,dx = \int\left(\frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+3}\right)dx = 3\int \frac{1}{x-4}\,dx - 2\int \frac{1}{x+3}\,dx = 3\ln(x-4) - 2\ln(x+3) + C$$

d) Se consideran las siguientes partes:

$$\begin{cases} u = 5x+6 \\ dv = e^x dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = 5\,dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (5x+6)\,e^x\,dx = (5x+6)\,e^x - \int 5\,e^x dx = (5x+6)\,e^x - 5\,e^x + C = (5x+1)\,e^x + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-2x+4}\,dx = \int \frac{2}{2}\frac{x-1}{x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx = \ln(x^2-2x+4) + C$

Se multiplica y divide por 2 para tener en el numerador la derivada del polinomio del denominador y se integra la fracción obtenida dando lugar a un logaritmo.

f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$

Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, se ha de realizar en primer lugar la división polinómica quedando:

$$\begin{array}{rl|l}
x^3 & & x+1 \\ \cline{3-3}
\underline{-x^3 - x^2} & & x^2 - x + 1 \\
/ \ \ -x^2 & & \\
\underline{x^2 + x} & & \\
/ \ \ x & & \\
\underline{-x - 1} & & \\
/ \ \ -1 & &
\end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 + \dfrac{-1}{x+1}$

Así, $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \int\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int (x^2 - x + 1)\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + C$