4. Calcular las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

a) $\int (3x^2 - 8x + 4)\, e^{-2x} dx$ **b)** $\int (x-1) \operatorname{sen} 3x \, dx$ **c)** $\int (x^2 + 8) \ln x \, dx$ **d)** $\int \ln x \, dx$

Solución

a) Se consideran las siguientes partes:

$$\begin{cases} u = 3x^2 - 8x + 4 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = (6x - 8)\, dx \\ v = \dfrac{-e^{-2x}}{2} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (3x^2 - 8x + 4)\, e^{-2x} dx = (3x^2 - 8x + 4) \frac{-e^{-2x}}{2} - \int (6x - 8) \frac{-e^{-2x}}{2} dx =$$
$$= -\frac{1}{2}(3x^2 - 8x + 4)\, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int (6x - 8)\, e^{-2x} dx$$

Para resolver la integral $\int (6x - 8)\, e^{-2x} dx$ se aplica de nuevo el método de integración por partes tomando:

$$\begin{cases} u = 6x - 8 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = 6\, dx \\ v = \dfrac{-e^{-2x}}{2} \end{cases}$$

Así,

$$\int (6x - 8)\, e^{-2x} dx = (6x - 8) \frac{-e^{-2x}}{2} - \int 6 \frac{-e^{-2x}}{2} dx = -\frac{1}{2}(6x - 8)\, e^{-2x} + 3 \int e^{-2x} dx =$$
$$= (4 - 3x)\, e^{-2x} + 3 \frac{-e^{-2x}}{2} + C = \left(\frac{5}{2} - 3x\right) e^{-2x} + C$$

Sustituyendo en la integral inicial queda:

$$\int (3x^2 - 8x + 4)\, e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}(3x^2 - 8x + 4)\, e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{2} - 3x\right) e^{-2x} + C\right) = \frac{1}{2}\left(-3x^2 + 5x - \frac{3}{2}\right) e^{-2x} + C$$

b) Se consideran las siguientes partes:

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ dv = \operatorname{sen} 3x \, dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-\cos 3x}{3} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int (x - 1) \operatorname{sen} 3x \, dx = (x - 1) \frac{-\cos 3x}{3} - \int \frac{-\cos 3x}{3} dx = -\frac{1}{3}(x - 1) \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x \, dx =$$
$$= -\frac{1}{3}(x - 1) \cos 3x + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + C = -\frac{1}{3}(x - 1) \cos 3x + \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3x + C$$

c) Se aplica el método de integración por partes tomando:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^2 + 8)\, dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} + 8x \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int \left(x^2 + 8\right) \ln x \, dx = \ln x \left(\frac{x^3}{3} + 8x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3} + 8x\right) \frac{1}{x}\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + 8x\right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + 8\right) dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + 8x\right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} + 8x\right) + C$$

d) Se aplica el método de integración por partes tomando:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 1\, dx \end{cases} \quad \text{de donde se obtiene} \quad \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ v = x \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$\int \ln x \, dx = (\ln x) x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$