3. Calcular las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado:

a) **a)** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ con $\sqrt{e^x - 1} = t$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}$ con $\sqrt{x} = t$

Solución

a) Elevando al cuadrado en la igualdad $\sqrt{e^x - 1} = t$ queda $e^x - 1 = t^2$, es decir, $e^x = 1 + t^2$.

Diferenciando en la última igualdad se obtiene: $e^x dx = 2t\, dt$, de donde, $dx = \frac{2t}{e^x} dt = \frac{2t}{1+t^2} dt$.

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} dt}{t} = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \operatorname{arctg} t + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C$

b) Elevando al cuadrado en la igualdad $\sqrt{x} = t$ queda $x = t^2$.
Diferenciando se obtiene: $dx = 2t\, dt$.

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = \int \frac{2t\, dt}{t(3+t)} = 2 \int \frac{1}{3+t} dt = 2 \ln(3+t) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = 2 \ln(3+\sqrt{x}) + C$

Nota: Esta integral también se puede resolver como inmediata tal y como se ha visto en el ejercicio 2j.