Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRAL DEFINIDA

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{2} x^3\, dx$ **b)** $\int_0^1 x\, e^x\, dx$ **c)** $\int_1^4 \left(2x^2 + \sqrt{x} - \frac{3}{x}\right) dx$

d) $\int_0^1 \frac{x}{2-x}\, dx$ **e)** $\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\, dx$ **f)** $\int_0^3 \frac{-2}{5x+1}\, dx$

Solución

a) $\int_{-2}^{2} x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0$

En primer lugar se ha calculado una primitiva de $f(x) = x^3$ y después se ha aplicado la regla de Barrow.

b) Para calcular $\int_0^1 x\, e^x\, dx$ en primer lugar se halla la integral indefinida por el método de integración por partes considerando $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x\, dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Aplicando la fórmula queda: $\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

Tomando la primitiva correspondiente a $C = 0$ y aplicando la Regla de Barrow, queda $\int_0^1 x\, e^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_0^1 = e^1 - e^1 - (0 - e^0) = 1$

c) $\int_1^4 \left(2x^2 + \sqrt{x} - \frac{3}{x}\right) dx = \int_1^4 \left(2x^2 + x^{1/2} - \frac{3}{x}\right) dx = \left[2\frac{x^3}{3} + \frac{x^{3/2}}{3/2} - 3\ln x\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3\ln x\right]_1^4 =$

$= \frac{2}{3}4^3 + \frac{2}{3}4\sqrt{4} - 3\ln 4 - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 3\ln 1\right) = \frac{128}{3} + \frac{16}{3} - 3\ln 4 - \frac{4}{3} = \frac{140}{3} - 3\ln 4$

d) $\int_0^1 \frac{x}{2-x}\, dx = \int_0^1 -\frac{2-x-2}{2-x}\, dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{2-x}\right) dx = \left[-x - 2\ln(2-x)\right]_0^1 = -1 - 2\ln 1 + 2\ln 2 = -1 + 2\ln 2$

e) $\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\, dx = 2\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\, dx = \left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_\pi^{2\pi} = -2\cos\frac{2\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} = -2(-1) + 2\cdot 0 = 2$

f) $\int_0^3 \frac{-2}{5x+1}\, dx = \frac{-2}{5}\int_0^3 \frac{5}{5x+1}\, dx = \frac{-2}{5}\left[\ln(5x+1)\right]_0^3 = \frac{-2}{5}\left[\ln 16 - \ln 1\right] = \frac{-2}{5}\ln 2^4 = \frac{-8}{5}\ln 2$

2. Calcular los valores de m para que:

a) $\int_0^m e^{3x}\, dx = \frac{7}{3}$ **b)** $\int_{m-5}^{0} (mx - x^2)\, dx = 0$

Solución

a) Se calcula el valor de la integral y luego se iguala a $\frac{7}{3}$:

$$\int_0^m e^{3x}\,dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^m = \frac{e^{3m}}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{e^{3m}-1}{3} = \frac{7}{3}$$

Por tanto $e^{3m} - 1 = 7 \;\Rightarrow\; e^{3m} = 8 \;\Rightarrow\; 3m = \ln 8 \;\Rightarrow\; m = \frac{\ln 2^3}{3} = \frac{3\ln 2}{3} = \ln 2$

b) Se calcula el valor de la integral y luego se iguala a 0:

$$\int_{m-5}^0 (mx - x^2)\,dx = \left[m\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{m-5}^0 = -\left(m\frac{(m-5)^2}{2} - \frac{(m-5)^3}{3}\right) = -(m-5)^2\left(\frac{m}{2} - \frac{m-5}{3}\right)$$

$$= -(m-5)^2\,\frac{3m-2m+10}{6} = -(m-5)^2\,\frac{m+10}{6} = 0 \quad\Rightarrow\quad m = 5, -10$$

3. Calcular $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}\,dx$ realizando el cambio de variable $\sqrt{3-x} = t$

Solución

A partir del cambio $\sqrt{3-x} = t$, elevando al cuadrado queda, $3 - x = t^2$, de donde se obtiene,

$x = 3 - t^2$ y $dx = -2t\,dt$

Los nuevos extremos de integración para esta variable se calculan sustituyendo los extremos iniciales en $t = \sqrt{3-x}$. Por tanto se tiene, $\begin{cases} x = 1 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{3-1} = \sqrt{2} \\ x = 2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{3-2} = 1 \end{cases}$

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{3-t^2}{t}(-2t)\,dt = \int_{\sqrt{2}}^1 (2t^2-6)\,dt = \left[2\frac{t^3}{3} - 6t\right]_{\sqrt{2}}^1 = \frac{2}{3} - 6 - \left(\frac{2\sqrt{2}^3}{3} - 6\sqrt{2}\right) = \frac{14\sqrt{2}-16}{3}$$

4. a) Calcular $\int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)dx$

b) Razonar si el valor de la integral anterior coincide con el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = e$

Solución

a) $\int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{8} + \ln x\right]_1^e = \frac{e^2}{8} + \ln e - \frac{1}{8} - \ln 1 = \frac{e^2}{8} + 1 - \frac{1}{8} = \frac{e^2+7}{8}$

b) Al verificarse $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 0 \;\; \forall\, x \in [1, e]$ se tiene que el área A de ese recinto coincide con el valor de la integral definida, $A = \int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)dx$

5. Calcular las siguientes integrales definidas y razonar si su valor coincide con el área del recinto limitado por la gráfica de la función integrando, el eje OX y las rectas verticales determinadas por los extremos de integración.

a) $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx$ **b)** $\int_{\pi/4}^{\pi}\cos x\ dx$ **c)** $\int_{-1}^{2}(3x+x^2)\,dx$ **d)** $\int_0^3(\sqrt{1+x}-x)dx$

a) $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx = \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{4} = 4+\frac{4^3}{3}-\left(-1+\frac{-1}{3}\right)=5+\frac{65}{3}=\frac{80}{3}$

El área del recinto es $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx = \frac{80}{3}$, ya que $f(x)=1+x^2 \geq 0 \quad \forall x\in[-1,\ 4]$

b) $\int_{\pi/4}^{\pi}\cos x\ dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

El área del recinto no puede ser igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ya que es un número negativo.

c) $\int_{-1}^{2}(3x+x^2)\,dx = \left[3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} =3\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}-\left(3\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}\right)=6+\frac{8}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=9-\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$

Para determinar si el valor calculado anteriormente coincide con el área del recinto indicado, es necesario estudiar el signo de $f(x) = 3x + x^2$.

Para ello se factoriza el polinomio, obteniéndose $f(x) = x\ (3 + x)$, de donde se puede deducir el signo según los intervalos determinados por las raíces $x = 0$, $x = -3$. En los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(0, +\infty)$ la función es positiva y en $(-3, 0)$ es negativa.

Por tanto, en el intervalo de integración $[-1, 2]$ la función toma valores negativos y positivos, en consecuencia el área del recinto no coincide con el valor de la integral definida.

d) $\int_0^3(\sqrt{1+x}-x)dx = \left[\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}-\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{2(1+x)\sqrt{1+x}}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{2\cdot 4\sqrt{4}}{3}-\frac{3^2}{2}-\frac{2}{3} = \frac{16}{3}-\frac{9}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

El área del recinto no coincide con el valor de la integral definida, ya que $f(x)=\sqrt{1+x}-x$ toma valores positivos y negativos en $[0, 3]$

6. Calcular el área del recinto finito limitado por:

a) el eje OX, las rectas $x=-1$, $x=1$ y la gráfica de $f(x)= e^{-x}$

b) el eje OX y la gráfica de $f(x)= -x^2-5x-6$

c) el eje OX y la gráfica de $f(x)= x^2-6x+5$

d) el eje OX, las rectas $x=-1$, $x=3$ y la gráfica de $f(x)= x + x^3$

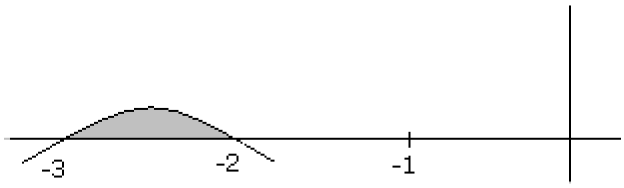
e) la recta $y = x$ y la gráfica de $f(x)= 3x - x^2$

Solución

a) Como $f(x)= e^{-x} \geq 0$ en $[-1, 1]$ se tiene que $A = \int_{-1}^{1}e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1} = -e^{-1}-(-e^{1}) = e-\frac{1}{e}$

b) La gráfica de $f(x)= -x^2-5x-6$ es una parábola con vértice en el punto $\left(\frac{-5}{2},\frac{1}{4}\right)$ y que corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $-x^2-5x-6=0$:

$$-x^2-5x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2,\ x=-3$$

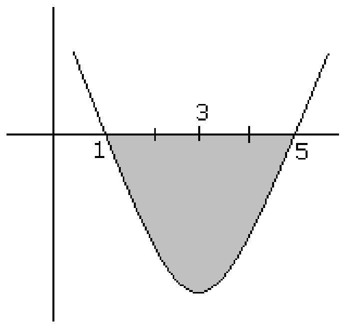


Como el recinto está por encima del eje de abscisas, se tiene

$$A=\int_{-3}^{-2}\left(-x^2-5x-6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{-2}=-\frac{(-2)^3}{3}-5\frac{(-2)^2}{2}-6(-2)-\left(-\frac{(-3)^3}{3}-5\frac{(-3)^2}{2}-6(-3)\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-10+12-9+\frac{45}{2}-18=-25+\frac{16+135}{6}=\frac{-150+151}{6}=\frac{1}{6}$$

c) La gráfica de $f(x)= x^2-6x+5$ es una parábola con vértice en el punto (3, -4) y que corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $x^2-6x+5=0$. Dichas soluciones son x=1, x=5.

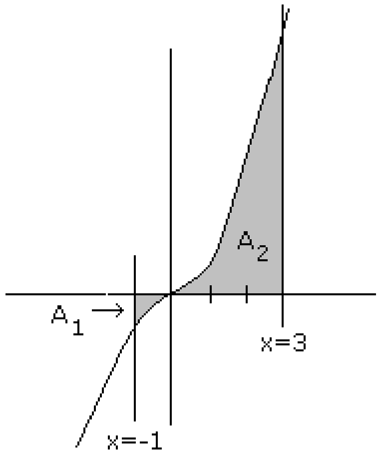


Como el recinto está por debajo del eje de abscisas, se tiene

$$A=\int_{1}^{5}-\left(x^2-6x+5\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-5x\right]_{1}^{5}=-\frac{5^3}{3}+6\frac{5^2}{2}-5\cdot 5-\left(-\frac{1^3}{3}+6\frac{1^2}{2}-5\right)=$$

$$=-\frac{125}{3}+75-25+\frac{1}{3}-3+5=\frac{32}{3}$$

d) Se representan la función $f(x)= x + x^3$ y las rectas x =-1, x =3 para determinar el recinto.



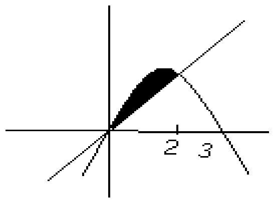
En este caso tiene una parte por debajo del eje OX y otra por encima, por ello calcularemos el área total como suma de A_1 y A_2

$$A_1 = \int_{-1}^{0} -\left(x + x^3\right) dx = \left[\frac{-x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -\left(\frac{-(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{3} \left(x + x^3\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{3} = \frac{9}{2} + \frac{81}{4} = \frac{99}{4}$$

De donde se deduce $A = A_1 + A_2 = \frac{3}{4} + \frac{99}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$

e) Se representan la recta $y = x$ y la parábola $f(x)= 3x - x^2$ para dibujar el recinto limitado por dichas curvas.



Para determinar los extremos de integración es necesario calcular los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema

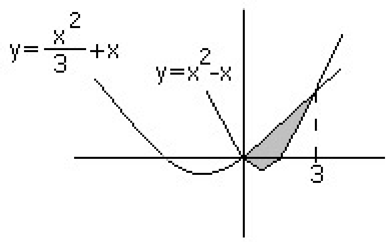
$$\begin{cases} y = x \\ y = 3x - x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 0.$$

Por tanto, $A = \int_0^2 \left(3x - x^2 - x\right) dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

7. Calcular el área del recinto finito limitado por las curvas: $y = x^2 - x$, $y = \frac{x^2}{3} + x$

Solución

Se representan las parábolas $y = x^2 - x$, $y = \frac{x^2}{3} + x$ para dibujar el recinto limitado por dichas curvas.



Para calcular los puntos de intersección de las parábolas, se resuelve el sistema $\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = \dfrac{x^2}{3} + x \end{cases}$.

$$x^2 - x = \frac{x^2}{3} + x \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \ , x=0$$

El área viene dada por la integral definida de la diferencia de las funciones $y = \frac{x^2}{3} + x$, $y = x^2 - x$, tomado como límites de integración $x = 0$ y $x = 3$:

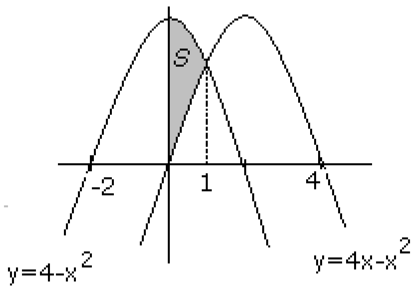
$$A = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{3} + x - (x^2 - x) \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{-2x^2}{3} + 2x \right) dx = \left[\frac{-2x^3}{9} + x^2 \right]_0^3 = -6 + 9 = 3$$

8. Calcular el área de los recintos:
$S = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 4x - x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$ y $T = \{(x, y) \mid y \geq 0,\ y \leq 4x - x^2,\ y \leq 4 - x^2\}$

Solución

Ambos recintos están limitados por las parábolas $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x^2$ que se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$

Dibujamos el recinto S

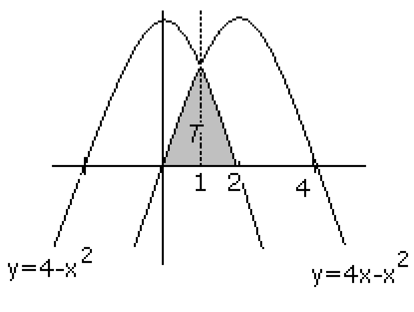


Por tanto su área es

$$A(S) = \int_0^1 \left(4 - x^2 - (4x - x^2)\right) dx = \int_0^1 (4 - 4x)\, dx =$$

$$= \left[4x - 2x^2\right]_0^1 = 4 - 2 = 2$$

Dibujamos el recinto T y se observa que su área se ha de calcular como suma de dos integrales definidas.



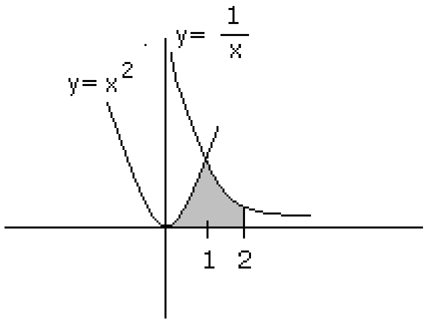
$$A(T) = \int_0^1 (4x - x^2)\, dx + \int_1^2 (4 - x^2)\, dx =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

9. Calcular el área del recinto finito limitado las curvas $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ y las rectas $y=0$, $x=2$.

Solución

Para dibujar el recinto considerado se representan las curvas $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$.



Para calcular los puntos de corte de ambas curvas, se resuelve el sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$x^2 = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; x^3 = 1 \;\Rightarrow\; x=1$$

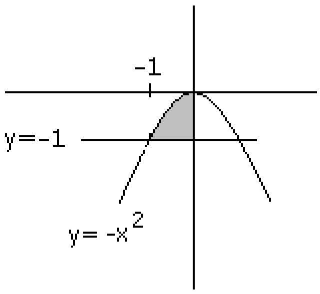
El área se calcula mediante la suma de dos integrales definidas.

$$A=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\ln x\right]_1^2 = \frac{1}{3}-0+\ln 2-\ln 1 = \frac{1}{3}+\ln 2$$

10. Calcular el área del recinto $T = \{(x,\ y) \mid x \le 0,\ \ -1 \le y \le -x^2\}$

Solución

Para dibujar el recinto se representan la parábola $y = -x^2$ y la recta horizontal $y = -1$.



Para calcular el extremo de integración inferior se resuelve el sistema $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

A la vista del dibujo, el extremo inferior es $x = -1$ y el extremo superior es $x = 0$, por tanto

$$A=\int_{-1}^{0}(-x^2-(-1))\,dx=\left[\frac{-x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{-(-1)^3}{3}+(-1)\right)=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$