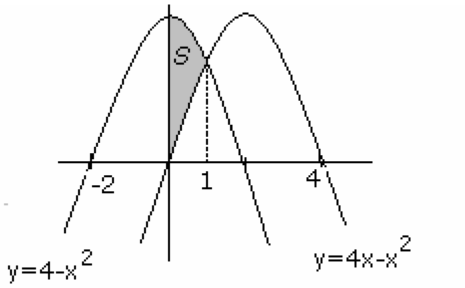
8. Calcular el área de los recintos:

$S = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 4x - x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$ y $T = \{(x, y) \mid y \geq 0,\ y \leq 4x - x^2,\ y \leq 4 - x^2\}$

Solución

Ambos recintos están limitados por las parábolas $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x^2$ que se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$

Dibujamos el recinto *S*

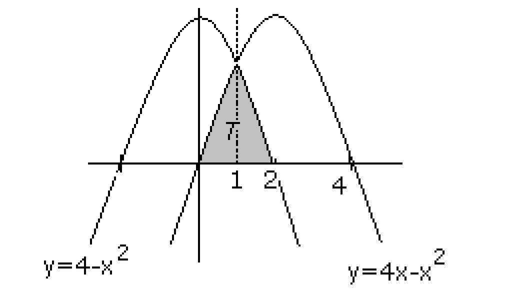


Por tanto su área es

$$A(S) = \int_0^1 \left(4 - x^2 - (4x - x^2)\right) dx = \int_0^1 \left(4 - 4x\right) dx =$$

$$= \left[4x - 2x^2\right]_0^1 = 4 - 2 = 2$$

Dibujamos el recinto *T* y se observa que su área se ha de calcular como suma de dos integrales definidas.



$$A(T) = \int_0^1 \left(4x - x^2\right) dx + \int_1^2 \left(4 - x^2\right) dx =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$