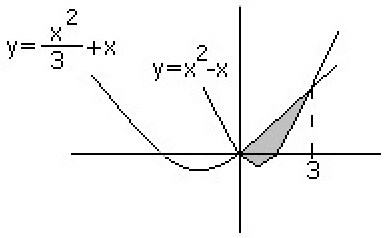
Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

7. Calcular el área del recinto finito limitado por las curvas: $y = x^2 - x$, $y = \frac{x^2}{3} + x$

Solución

Se representan las parábolas $y = x^2 - x$, $y = \frac{x^2}{3} + x$ para dibujar el recinto limitado por dichas curvas.



Para calcular los puntos de intersección de las parábolas, se resuelve el sistema $\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = \frac{x^2}{3} + x \end{cases}$.

$$x^2 - x = \frac{x^2}{3} + x \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \quad , x = 0$$

El área viene dada por la integral definida de la diferencia de las funciones $y = \frac{x^2}{3} + x$, $y = x^2 - x$, tomado como límites de integración $x = 0$ y $x = 3$:

$$A = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{3} + x - (x^2 - x)\right) dx = \int_0^3 \left(\frac{-2x^2}{3} + 2x\right) dx = \left[\frac{-2x^3}{9} + x^2\right]_0^3 = -6 + 9 = 3$$